

TRAITÉ

DE LA LUMIÈRE.

DE L'IMPRIMERIE DE GUIRAUDET,

RUE SAINT-HONORÉ, N° 315.



TRAITÉ

DE

LA LUMIÈRE,

PAR J.-F.-W. HERSCHEL,

PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE LONDRES,

TRADUIT DE L'ANGLAIS AVEC NOTES

PAR MM.

P.-F. VERHULST, DOCTEUR EN SCIENCES,

ET

A. QUETELET, DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE BRUXELLES.

TOME PREMIER



PARIS,

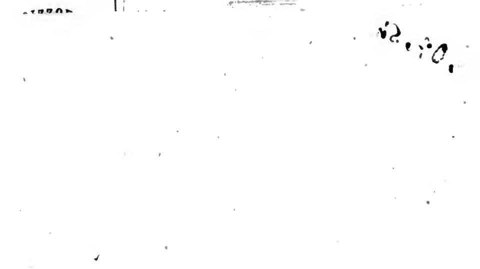
A LA LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE-INDUSTRIELLE

DE MALHER ET CIE,

PASSAGE DAUPHINE.

M DCCC XXIX.







AVERTISSEMENT.

Le *Traité de la Lumière* que nous présentons au public est extrait de l'*Encyclopédie métropolitaine*, ouvrage immense, auquel coopèrent les savants anglais les plus distingués. Les différentes branches des sciences, des lettres et des arts, sont exposées dans des articles fort étendus, qui peuvent être considérés comme autant de traités spéciaux. Cette collection, qui ne doit pas comprendre moins de cinquante volumes in-quarto, et qui coûtera aux souscripteurs plus de 1,200 fr., ne pourra guère se répandre sur le continent, où la difficulté de la langue sera un nouvel obstacle à sa propagation. Si l'on considère, d'une autre part, la nécessité dans laquelle on se trouve de souscrire à la fois pour une série d'ouvrages souvent très inégaux en mérite, et traitant des sujets les plus divers, on sentira que

peu de personnes seront à même de jouir, chacune dans sa partie, des avantages qu'on était en droit d'attendre de la publication de l'*Encyclopédie métropolitaine*.

Ces considérations nous ont portés à publier séparément un des principaux articles, qui a pour objet la lumière (*light*), et qui ne se recommande pas moins par la manière claire et savante dont le sujet est traité, que par le nom de l'auteur, qui se rattache depuis long-temps aux plus brillantes recherches dans les sciences. Cet article peut être d'ailleurs considéré, avec juste raison, comme le traité le plus complet qui existe sur cette importante partie de la physique. Nous avons cru devoir modifier un peu le titre, malgré les observations de M. Herschel, qui nous demandait avec modestie que son ouvrage fût présenté comme un simple *essai*.

Nous n'avons rien négligé, du reste, pour donner au texte français toute la correction possible; nous espérons même que, sous ce rapport, la traduction méritera la préférence sur l'édition anglaise, qui, en général, laisse à désirer du côté de l'exactitude typographique. N'ayant entrepris notre travail que dans l'unique but de servir la science, nous n'avons pas craint de refaire la plupart des calculs :

M. Verhulst, qui s'est plus particulièrement occupé de la traduction, a bien voulu se charger encore de cette vérification pénible. Nous nous sommes empressés aussi de mettre à profit les différentes corrections que M. Herschel a eu l'obligeance de nous transmettre, et pour lesquelles nous lui témoignons ici toute notre reconnaissance. Nous avons regretté que les occupations de ce savant ne lui permissent pas d'ajouter quelques additions à son travail sur plusieurs points de l'optique qui ont donné lieu à de nouvelles recherches depuis la publication récente du *Traité de la Lumière* : l'un de nous a essayé de remplir cette tâche difficile, dans des notes que l'on trouvera à la fin de l'ouvrage.

A. QUETELET.

—

TRAITÉ DE LA LUMIÈRE.

PREMIÈRE PARTIE.

DE LA LUMIÈRE NON POLARISÉE.

§ 1er. — *Introduction.*

Sommaire. — Les corps sont classés en opaques et en lumineux par eux-mêmes. — Les corps opaques deviennent lumineux en présence d'un corps lumineux. — Les corps opaques interceptent la lumière. — La lumière se transmet en ligne droite, — dans toutes les directions, — et de chaque point physique d'une surface lumineuse. — Vitesse de la lumière. — Aberration de la lumière. — La vitesse de la lumière est constante; — elle est rendue appréciable par des comparaisons.

1. — Nous nous proposons, dans cet ouvrage, d'exposer les propriétés de la lumière, les lois physico-mathématiques qui règlent sa direction, son intensité, son état de polarisation, sa coloration, les interférences de ses rayons; de faire connaître les théories que l'on a imaginées pour rendre compte des phénomènes brillants, mais souvent compliqués, de l'optique; d'exposer les lois de la vision, et le parti qu'en a su tirer le génie du physicien et de l'artiste pour perfec-

tionner l'organe de la vue, et nous faire apercevoir et mesurer des objets qui, par leur éloignement ou leur ténuité, auraient échappé à nos sens.

2. — La vue est le plus parfait de nos sens, celui qui nous donne les notions les plus nombreuses et les plus exactes, et dont l'exercice nous procure le plus de jouissances. En faisant abstraction de toute idée d'utilité, la seule perception de la lumière est en elle-même une source de plaisirs. Nous pourrions citer l'exemple d'une foule d'individus, privés dès l'enfance de l'usage de leurs yeux par une infirmité naturelle, chez qui la sensation de plaisir la plus vive était produite par la faible lueur que les rayons du soleil faisaient pénétrer dans leur organe imparfait. Mais si nous joignons à cette simple perception de la *clarté* celle des formes et du mouvement, si nous songeons à la richesse et à la variété étonnante des couleurs, et à l'espèce d'*ubiquité* dont nous sommes doués par l'appréciation exacte des situations et des distances, nous devons être pénétrés d'admiration et de reconnaissance.

3. — Par quel mécanisme jouissons-nous de cet avantage inestimable? La curiosité seule nous porterait à cette recherche, si un intérêt plus direct ne nous engageait à nous y livrer. Tel est le pouvoir de la science, que l'examen attentif des moyens par lesquels la vision s'opère dans notre œil a conduit les physiciens à la découverte des instruments qui augmentent la puissance de cet organe d'une manière extraordinaire, en donnant à l'homme le regard perçant de l'aigle et la finesse de vue de l'insecte. Par eux les infirmités de la vieillesse sont retardées ou diminuées; bien plus, ils peuvent rendre la vue à celui qui l'a perdue, et faire jouir des douceurs de la lumière l'infortuné qui en a été privé pendant des années ou même depuis sa naissance.

La nature nous offre une foule d'objets dont les uns échappent à nos sens par leur extrême délicatesse, et les autres surpassent notre imagination par leur grandeur.

C'est par suite des propriétés singulières que l'on découvre dans la lumière, suivant ses divers degrés de polarisation, que les idées du philosophe sur la constitution intime des corps et la nature du monde matériel sont tout-à-fait distinctes et indépendantes des impressions de forme, de couleur, de distance, qu'elles font naître chez le vulgaire.

Ces notions, à la vérité, s'adressent plutôt à l'intelligence qu'aux sens; mais elles n'en sont pas moins réelles ni moins dignes d'attention. Entre les mains du physicien, la lumière polarisée n'est pas seulement un moyen de *voir*, c'est un instrument à l'aide duquel il parvient à toucher, pour ainsi dire, les dernières molécules de la matière; il découvre et il étudie des forces et des lois dont il ne peut s'assurer que par cet unique moyen, et qui se rattachent aux recherches les plus importantes et les plus difficiles que présente l'étude de la nature.

4. — Les anciens croyaient que la vision se faisait par une espèce d'émanation partant de l'œil vers l'objet. S'il en était ainsi, il n'y aurait pas de raison pour que les objets ne fussent pas visibles dans l'obscurité. Il faut évidemment quelque chose de plus que la présence de l'objet pour qu'il frappe notre vue; il doit encore être dans un certain état que nous exprimons en disant qu'il est *lumineux*. Parmi les corps de la nature, les uns possèdent par eux-mêmes la propriété d'exciter dans notre œil la sensation de la *clarté*: tels sont le soleil, les étoiles, une lampe, un fer rouge, etc. De tels corps sont dits *lumineux par eux-mêmes*; mais cette classe est la moins nombreuse. Les autres restent invisibles dans l'obscurité, quoique nos yeux se dirigent directement vers eux, et ils sont en conséquence appelés obscurs, non lumineux, ou *opaques*, quoique ce mot soit encore employé quelquefois pour exprimer le défaut de transparence. Tous les corps, cependant, quoique non lumineux par eux-mêmes, et incapables d'exciter quelque sensation dans notre œil, acquièrent cette faculté lorsqu'ils sont placés en présence d'un

corps lumineux par lui-même. Quand on apporte une lampe dans une chambre obscure, nous voyons non seulement la lampe, mais encore tous les corps qui l'entourent; ils sont tous, aussi long-temps que la lampe reste dans la chambre, devenus lumineux, et capables de rendre tels à leur tour les autres corps.

Ainsi, un rayon solaire introduit dans une chambre obscure rendra lumineuse et par conséquent visible une feuille de papier sur laquelle il tombera, et celle-ci, à son tour, éclairera tout l'appartement, et rendra visibles tous les objets qui s'y trouveront, aussi long-temps qu'elle continuera à recevoir le rayon solaire. La lune et les planètes sont des corps opaques; mais la partie de ces astres qui se trouve éclairée par le soleil devient lumineuse à son tour, et produit les mêmes effets que les corps lumineux par eux-mêmes : par-là nous voyons que la transmission de la lumière ne se fait pas seulement entre les corps lumineux et nos yeux, mais encore entre les corps lumineux et les corps opaques, ou entre les corps lumineux qui s'éclairent mutuellement.

5. — Plusieurs corps possèdent la propriété d'intercepter cette communication entre les corps lumineux et nos yeux ou les autres corps. Un écran métallique interposé entre le soleil et nos yeux nous empêche de voir cet astre; s'il est placé entre le soleil et une feuille de papier blanc ou un autre objet, *il projettera une ombre* sur cet objet, c'est-à-dire qu'il le rendra non lumineux. Cette propriété des corps d'intercepter la lumière nous apprend que cette transmission se fait en ligne droite. Nous ne pouvons voir à travers un tube métallique courbé, ni recevoir le moindre rayon de lumière à travers trois petits trous percés dans des plaques de métal placées les unes derrière les autres, à quelque distance que ce soit, à moins que les trous ne soient exactement en ligne droite. De plus, les ombres d'un corps, lorsqu'elles sont reçues sur des plans perpendiculaires à la direction des rayons émanés du corps lumineux, sont semblables à la section du

corps qui les produit; ce qui ne saurait être si la lumière ne se transmettait en ligne droite entre les contours du corps et ceux de l'ombre. Nous énonçons cette loi en disant que la lumière est *émanée*, *rayonne* ou *se propage* en ligne droite. Cependant on ne doit regarder ces locutions que comme l'expression d'un *simple fait*, sans rien préjuger sur la manière dont se fait cette émanation.

On observe encore que la lumière est émanée des corps lumineux dans toutes les directions, car nous les voyons toujours, quelle que soit la position de notre œil, pourvu qu'aucun obstacle ne se trouve interposé. Telle est la distinction essentielle entre un corps lumineux et des images optiques qui ne transmettent la lumière que dans de certaines directions, ainsi que nous le verrons bientôt. Nous examinerons plus loin si cette transmission a lieu avec *une égale intensité* dans toutes les directions.

6. — Ainsi la lumière rayonne de chaque point (du moins de chaque point *physique*) d'un corps lumineux. On pourra peut-être regarder ceci comme une vérité triviale, car tous les points d'un corps lumineux d'où il n'émane point de lumière (comme les taches du soleil) sont effectivement non lumineux, et le corps est seulement lumineux en partie. On n'aperçoit la forme d'une tache que parce qu'elle est la même que celle de la surface lumineuse qui l'entoure. Néanmoins cette forme se peint à notre esprit par des raisons que nous développerons plus loin en parlant de la formation des images.

Il est possible, et même probable, qu'une surface lumineuse, telle que celle de la flamme d'une chandelle, soit composée uniquement d'un nombre immense, mais limité, de points lumineux environnés d'espaces non lumineux. Mais la vue est impuissante pour s'assurer de la vérité de cette proposition; et nous nous contenterons de regarder chaque point physique d'une surface lumineuse comme une source *spontanée et indépendante* de lumière, en nous rapportant au té-

moignage de nos sens. Nous pouvons grossir dans un télescope l'image du soleil, et n'embrasser qu'une très petite portion du disque (abstraction faite des taches) sans que la *visibilité* de cette portion soit aucunement affaiblie par l'exclusion du reste. Dans ce sens, notre proposition n'est pas une vérité triviale, mais un fait important dont nous allons bientôt tracer les conséquences.

7. — Quand un rayon solaire, passant à travers un petit trou, est reçu sur un écran blanc placé derrière à une grande distance, nous voyons un cercle lumineux qui s'élargit d'autant plus que l'écran s'éloigne davantage de l'ouverture. Si l'on mesure le diamètre de l'image à différentes distances du trou, on trouvera, en négligeant quelques légères différences dont nous ne nous occuperons pas pour le moment, que l'angle sous-tendu par l'image, et aboutissant au centre de l'ouverture, est constant et égal au diamètre apparent du soleil. La raison en est évidente. Les rayons partis de chaque point de l'astre traversent le trou, et continuent leur route en ligne droite jusqu'à ce qu'ils atteignent l'écran : ainsi chaque point du disque a sur l'écran son point correspondant ; le cercle qui se peint sur l'écran est réellement l'*image* ou la représentation du soleil. On peut se convaincre de la vérité de cette explication en faisant l'expérience pendant une éclipse de soleil : alors l'image, au lieu de paraître ronde, paraît échancrée comme le soleil (1). De même, si l'on tient une carte dans laquelle on a percé un trou avec une épingle, entre une chandelle et un morceau de papier blanc placé dans une chambre obscure, on verra une représentation fidèle mais renversée de la flamme venir

(1) Pendant l'éclipse du 7 septembre 1820, cette forme échancrée se montrait d'une manière vraiment frappante dans les interstices lumineux laissés entre les ombres de petits objets irréguliers, comme les feuilles des arbres, etc. Ce fait fut remarqué par des personnes qui n'en soupçonnaient pas même la cause.

se peindre sur le papier, et s'agrandir si l'on éloigne davantage le papier de la carte. En plaçant un écran blanc dans une chambre obscure, à quelques pieds d'une petite ouverture circulaire, on verra les objets extérieurs se projeter sur l'écran avec leurs formes et leurs couleurs, à l'état de mouvement ou de repos. (Voy. fig. 6.)

Pour comprendre ceci, nous devons nous rappeler que tous les objets exposés à la lumière deviennent lumineux; que la lumière rayonne de chaque point physique dans toutes les directions, et qu'ainsi chaque point sur l'écran reçoit en même temps la lumière de tous les points de l'objet. On peut dire la même chose de l'ouverture; mais la lumière qui y tombe la traverse et continue sa marche en ligne droite : ainsi l'ouverture devient le sommet d'un cône qui s'étend dans les deux sens, et qui d'une part a pour base l'objet et de l'autre l'écran. La section de ce cône par le plan de l'écran est l'image que nous voyons projetée, et qui doit nécessairement être semblable à l'objet et dans une situation renversée, d'après les premières règles de la géométrie.

8. — **Maintenant si dans notre écran qui reçoit l'image du soleil nous perçons un autre petit trou, et que nous plaçions un nouvel écran derrière le premier, la lumière va traverser ce trou et atteindre le dernier écran ; mais il est clair que les rayons ne subiront pas une nouvelle divergence dans ce passage, et qu'ils ne peindront plus une nouvelle image du soleil entier, mais seulement de la petite portion du disque correspondante à la partie de l'image qu'occupait la surface du trou sur le premier écran. Les génératrices de la surface du cône divergeront beaucoup moins dans ce cas; et, si les trous sont suffisamment petits et éloignés les uns des autres, elles approcheront de la ligne physique d'autant plus que les trous seront plus petits et à une plus grande distance les uns des autres. (Voy. fig. 7.) Si nous concevons les trous réduits à de simples points physiques, ces lignes formeront ce**

que nous appelons des rayons de lumière. Mathématiquement parlant, un rayon de lumière est une pyramide ayant pour sommet un point lumineux, et pour base une portion infiniment petite d'une surface éclairée par ce point et supposée couverte par cette émanation lumineuse, quelle que soit sa nature. Cette pyramide, dans des milieux homogènes, et quand la direction du rayon ne change point, a pour arètes des lignes droites, comme nous l'avons déjà vu. Dans les cas où le rayon est infléchi ou brisé subitement dans sa marche, nous pouvons toujours concevoir une pyramide correspondante dont les arètes soient des courbes ou des lignes brisées; ou, pour abréger, nous substituerons à cette pyramide des lignes purement mathématiques, droites, courbes ou brisées, suivant les circonstances.

9. — La lumière exige un certain temps pour sa propagation. Deux spectateurs placés à des distances différentes d'un objet lumineux que l'on découvrirait tout à coup ne commenceraient point à le voir dans le même instant mathématique; le plus proche le verrait avant le plus éloigné : de même que deux personnes placées à des distances inégales d'une arme à feu entendent le bruit de l'explosion dans des moments différents. Pareillement un objet lumineux pourrait être éteint subitement, que le spectateur continuerait encore à le voir quelque temps après comme s'il n'avait pas cessé d'être lumineux, et ce temps serait d'autant plus long que le spectateur serait plus éloigné. L'intervalle dont nous parlons est cependant excessivement petit pour des distances telles qu'on les rencontre à la surface de la terre, et on peut même le regarder alors comme absolument insensible. Mais il n'en est pas de même pour l'immense étendue des régions célestes. Les éclipses et les émersions des satellites de Jupiter sont visibles beaucoup plus tôt (presqu'un quart d'heure) quand la terre est dans son plus grand voisinage de cet astre que lorsqu'elle s'en trouve le plus éloignée. *Il faut donc à la lumière*

un certain temps pour traverser l'espace. Sa vitesse est finie, quoique immense, et égale près de 192,500 milles (69,244 lieues communes de France) par seconde.

Cette conséquence a été déduite, par le calcul, du phénomène dont nous venons de parler. Cette excessive vitesse pourrait nous étonner et nous porter à attribuer à une autre cause la différence observée, si cette explication n'était pleinement confirmée par un autre phénomène astronomique, l'*aberration de la lumière*, que nous allons essayer d'expliquer, sans entrer dans aucune discussion sur la manière dont se fait la vision.

10. — Supposons qu'un rayon de lumière émané de l'étoile S (voy. fig. 1), assez éloignée pour que tous ses rayons puissent être regardés comme parallèles, soit reçu sur un petit écran A, au milieu duquel est percée une très petite ouverture ; que de plus ce rayon, après avoir traversé cette ouverture, soit reçu à une certaine distance AB sur un écran B, perpendiculaire à sa direction. Nommons B le point d'incidence, tout l'appareil étant supposé en repos. Si nous concevons une droite qui joigne les points A et B, cette droite indiquera la direction que le rayon a réellement suivie, et dans laquelle se trouve l'étoile ; l'angle entre cette direction et une autre droite donnée de position, tel qu'un fil à plomb par exemple, nous donnera le lieu de l'étoile par rapport à cette droite fixe. Pour plus de simplicité, nous supposerons cet angle égal à zéro, ou l'étoile exactement dans la verticale. Alors le point B, où tombe le rayon, sera marqué par la perpendiculaire abaissée du point A, et la direction dans laquelle nous jugerons que doit se trouver l'étoile sera précisément celle de la gravité : c'est là ce qui arriverait si la terre, le spectateur et tout l'appareil, étaient en repos.

Si nous les supposons maintenant emportés dans l'espace dans une direction horizontale A C, B D, avec une vitesse uniforme et par conséquent insensible, le fil à plomb restera immobile, et coïncidera toujours avec le même point de l'é-

cran, au moment où le rayon S A traversera l'ouverture A, A et B étant toujours les places respectives de l'ouverture et de sa projection orthogonale sur le second écran.

Quand le rayon aura traversé l'ouverture, il continuera à suivre la direction S A B comme auparavant, indépendamment du mouvement de l'appareil; et, après un temps égal à

$$\frac{\text{distance A B}}{\text{vitesse de la lumière}} = t,$$

il atteindra l'écran inférieur. Mais, pendant ce temps, l'ouverture, les écrans et le fil à plomb, auront parcouru l'espace

$$\text{A}\,a = \text{B}\,b = t \times \text{vitesse de translation}$$

$$= \text{A B} \times \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}.$$

A l'instant donc où ce rayon frappera l'écran inférieur, le fil à plomb ne sera plus suspendu entre A et B, mais entre a et b. Et puisque a est l'*ouverture réelle*, et B le *véritable point d'incidence de la lumière sur l'écran*, le spectateur, qui juge uniquement d'après ces deux points, sera naturellement porté à croire que le rayon a dévié de la verticale, et s'est approché de la direction du mouvement de la terre, en faisant avec le fil à plomb un angle dont la tangente

$$= \frac{\text{A}\,a}{\text{A B}} \text{ ou } \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}.$$

11. — L'œil est un appareil semblable à celui que nous venons de décrire : sa rétine est l'écran sur lequel tombe la lumière de l'étoile ou du luminaire; et nous jugeons de leur position uniquement par le point de l'écran où l'impression se fait sentir dans ce moment. La pupille est l'ouverture. Si le corps entier était en mouvement avec une vitesse proportionnée à celle de la lumière, l'œil étant toujours dirigé dans



le même sens, la rétine aurait déjà changé de place avant que les rayons eussent traversé l'espace qui la sépare de la pupille, et le point où se produirait la sensation ne serait plus le même que si l'œil et le spectateur fussent restés en repos : c'est cette déviation que l'on appelle l'*aberration de la lumière*.

12. — Chaque spectateur sur la terre participe au mouvement général du globe, dont la grande vitesse de rotation annuelle autour du soleil, quoique loin d'égaler celle de la lumière, n'est pas néanmoins comparativement insensible : de là vient que les étoiles, le soleil, les planètes, paraissent tous s'écarter de leur véritable position dans le sens du mouvement de la terre.

13. — La direction de ce mouvement changeant à chaque instant, puisque la terre décrit une orbite autour du soleil, celle de ce déplacement apparent des étoiles varie également, c'est-à-dire que le lieu apparent de chaque étoile décrit une petite orbite autour du lieu vrai : c'est à ce phénomène que fait allusion le mot *aberration*. Bradley remarqua le premier, comme un fait dont il ignorait encore la cause, que les étoiles paraissent décrire dans le ciel de petites ellipses annuelles d'environ 40″ de diamètre. La découverte de la vitesse de la lumière par les éclipses des satellites de Jupiter, que Roemer venait de faire récemment, lui en donna bientôt l'explication. Des observations postérieures, spécialement celles de Brinkley et de Struve, nous ont mis en état d'assigner avec une grande précision la valeur numérique de cette inégalité, et d'en déduire la vitesse de la lumière, que cette méthode fait monter à 191,515 milles (68,890 lieues) par seconde ; résultat qui ne diffère de celui que nous avons donné précédemment que d'un deux-centième de la valeur totale : le dernier chiffre est certainement préférable.

14. — Cette propriété de la lumière n'est pas la seule dont

la découverte soit due aux observations astronomiques : elles nous apprennent encore que la lumière du soleil, des planètes et de toutes les étoiles fixes, se propage avec une vitesse égale et uniforme. Maintenant que nous savons que ces astres sont à des distances différentes et variables, nous pouvons en conclure que la vitesse de la lumière est indépendante de la source dont elle émane et de la distance qu'elle parcourt avant d'arriver à notre œil.

15. — La vitesse de la lumière, en traversant cet espace libre et peut-être vide qui nous sépare des planètes et des étoiles, doit donc être supposée uniforme; et le calcul des éclipses des satellites de Jupiter et des lieux vrais des planètes, estimés dans cette hypothèse, lève tous les doutes à cet égard, par son accord avec le résultat des observations. Nous trouverons plus tard des motifs de croire que cette vitesse éprouve un changement lorsque la lumière entre dans un milieu résistant, comme aux confins de l'atmosphère de la terre et des autres planètes; mais, en tout cas, nous n'avons aucune raison pour supposer qu'elle varie tant qu'elle ne sort pas d'un même milieu parfaitement homogène.

16. — L'énorme vitesse de la lumière, quelque prodigieuse qu'elle puisse paraître, est cependant un des résultats les mieux établis que présente la science, et nous prépare à d'autres évaluations numériques beaucoup plus étonnantes encore. C'est lorsque nous tentons de mesurer les immenses phénomènes de la nature avec notre mesquine échelle d'unités, comme nous le ferions pour des objets terrestres, que nous sentons notre insignifiance dans le système de l'univers. Même après que les vérités nous sont démontrées, nous ne pouvons les concevoir distinctement. Nous sommes perdus dans l'immensité des nombres, et nous devons avoir recours à d'autres termes de comparaison pour les rendre appréciables.

Un boulet de canon emploierait plus de dix-sept ans pour

atteindre le soleil, en lui supposant pendant toute sa course la vitesse dont il était animé au moment de la décharge ; néanmoins la lumière traverse le même espace en sept minutes et demie. L'oiseau dont le vol est le plus rapide mettrait près de trois semaines à faire le tour du globe. La lumière franchit le même espace en beaucoup moins de temps qu'il n'en faut à l'oiseau pour faire un simple battement d'ailes : sa vitesse n'est comparable qu'à la distance qu'elle parcourt. On peut démontrer que la lumière ne peut arriver à notre système solaire, de l'étoile fixe la plus voisine, en moins de cinq ans ; et le télescope nous découvre des astres probablement des milliers de fois plus éloignés.

Mais ces considérations appartiennent plutôt à l'astronomie qu'à l'optique, et nous les abandonnons pour reprendre l'examen des phénomènes relatifs à l'émission de la lumière.

§ II. — *De la photométrie.*

La lumière diminue d'autant plus que sa source est plus éloignée. — Son intensité est en raison inverse du carré des distances. — L'éclairement est proportionnel au nombre et à l'intensité des rayons, — et à l'aire de la surface éclairante. — Son expression générale. — Eclairement oblique. — Définition de la grandeur apparente. — Définition de l'éclat intrinsèque réel. — Eclat intrinsèque apparent. — Définition de la lumière absolue. — Définition de la lumière apparente. — Diminution de la lumière apparente par l'effet de la distance. — Les objets paraissent également éclatants à toutes les distances. — Dans quel sens on doit entendre cette proposition. — Définition de l'angle d'émanation. — Si l'émission de la lumière dépend de l'angle d'émanation. — Les surfaces brillent du même éclat sous tous les angles visuels. — Preuve expérimentale de la loi de l'émanation. — Loi de l'émanation oblique de la lumière. — Recherche de l'éclairement d'un plan par un luminaire. — Formule générale pour l'éclairement d'une petite surface plane. — Applications. — Pouvoir éclairant d'une portion circulaire quelconque d'un ciel également lumineux. — Expression générale de l'éclairement quand le luminaire n'est pas également éclatant dans toute son étendue. — Eclairement à la surface du soleil. — Photomètres. — L'œil ne peut juger qu'imparfaitement des divers degrés de clarté. — L'œil est en état de juger de l'égalité de deux degrés de clarté dans certaines circonstances. — Axiome de photométrie. — Principe de photométrie comparative de Bouguer. — Photomètre de Ritchie. — Son usage. — Preuve expérimentale du décroissement de la

17. — Un des phénomènes les plus frappants est sans doute la diminution du pouvoir éclairant d'une source de lumière quelconque par l'accroissement de sa distance. La lumière d'une chandelle est assez vive pour lire à une certaine distance ; doublons ou décuplons cette distance, et la lecture deviendra impossible.

L'évaluation numérique des degrés d'intensité de la lumière constitue la branche de l'optique qui porte le nom de *photométrie* (φως, μετρω).

18. — Si la lumière était une émanation matérielle qui se dissipât en particules infiniment petites dans toutes les directions, il est clair que la même quantité répandue sur la surface d'une sphère dont le point lumineux occuperait le centre se répandrait successivement à la surface de sphères concentriques de plus en plus grandes, à mesure que les rayons s'éloigneraient davantage, et que son intensité ou le nombre des rayons qui tombent sur une surface de grandeur déterminée serait pour chaque sphère en raison inverse de sa surface ou du carré de son rayon. Sans adopter cette hypothèse, on peut rendre la chose évidente de la manière suivante : Plaçons une chandelle derrière un écran opaque criblé de petits trous égaux : la lumière les traversera, et sera interceptée partout ailleurs, en formant un faisceau pyramidal de rayons lumineux ayant la chandelle pour sommet. Si l'on place une feuille de papier derrière l'écran, elle sera parsemée de taches lumineuses, disposées exactement comme les trous de l'écran. Si ceux-ci sont assez petits, assez nombreux, et que l'œil soit assez éloigné du papier pour qu'on ne puisse plus distinguer chaque tache en particulier, l'on

éprouvera toujours une sensation de clarté; le papier paraîtra entièrement éclairé, et présentera une teinte bigarrée, qui tendra cependant à devenir d'autant plus uniforme que les trous seront plus petits et plus nombreux, et que l'œil sera placé à une plus grande distance, tant qu'à la fin le papier paraîtra uniformément éclairé.

Maintenant si l'on bouche les trous de deux en deux, il est manifeste que le papier ne recevra plus que la moitié de la lumière : par conséquent il sera moins éclairé de moitié, et le degré d'*éclairement*, toutes choses égales d'ailleurs, sera proportionnel au nombre des trous de l'écran ou à celui des taches lumineuses, c'est-à-dire au nombre des rayons émanés du corps éclairant, quand on suppose les trous infiniment petits et infiniment rapprochés.

19. — Plaçons un écran, percé d'une foule innombrable de petits trous égaux, à une distance donnée (1 pied) d'une chandelle, et dans la pyramide de rayons divergents qui s'élèvera derrière, un morceau de papier de surface déterminée (1 pouce carré, par exemple), de manière à ce qu'il y soit entièrement contenu : il est évident que le nombre des rayons qui y tomberont sera d'autant moindre que le papier sera plus loin de l'écran, puisque la quantité de rayons qui traversent l'écran doit se répandre sur une superficie de plus en plus étendue. Si le papier était appliqué contre l'écran, il recevrait un nombre de rayons égal à celui des trous dans 1 pouce carré de la surface de l'écran; mais, à une distance double (2 pieds) de la chandelle, ce même nombre de rayons, à cause de leur divergence, se répandra sur une surface de 4 pouces carrés, et par conséquent le papier n'en recevra plus que le quart.

Ainsi, en représentant par l'unité le degré d'éclairement à la surface de l'écran ou à la distance 1, il ne sera plus égal qu'à $\frac{1}{4}$ à la distance 2. En général, à la distance D, la fraction $\frac{1}{D^2}$ mesurera ce même éclairement, les aires des sections

d'une pyramide par des plans parallèles à sa base étant en raison des carrés de leurs distances au sommet.

20. — Ce raisonnement étant indépendant du nombre ou de la grandeur des trous, et par conséquent du rapport de la partie de la surface occupée par les trous à la partie intacte, nous pouvons faire croître ce rapport à l'infini : l'écran disparaît alors, et le papier est éclairé directement. De là nous conclurons que la quantité de lumière ou le degré d'éclairement que reçoit une petite surface plane de grandeur déterminée, exposée librement et perpendiculairement à l'action d'un luminaire, est en raison inverse du carré de sa distance à ce luminaire, toutes les circonstances demeurant les mêmes.

21. — Lorsqu'une seule chandelle se trouve à une distance donnée, devant un système de trous dans un écran, comme dans l'expérience précédente, et que les rayons tombent sur un second écran, le degré d'éclairement pourra être supposé égal à I.

Que l'on place maintenant une seconde chandelle immédiatement derrière la première, et assez près pour que sa lumière traverse les mêmes trous, on conçoit que pour lors le degré d'éclairement de l'écran augmentera, quoique le nombre et la grandeur des points éclairés n'aient point changé. On dit alors que chaque point est éclairé avec plus d'intensité.

Maintenant (l'œil étant toujours supposé assez éloigné et les points lumineux assez voisins pour que le papier soit uniformément éclairé, et que l'on ne puisse distinguer aucun point en particulier), si l'on dérange un peu la chandelle dans le sens latéral, en lui conservant sa distance, la quantité d'éclairement du papier ne sera point altérée. Dans ce cas, le nombre des points lumineux est doublé; mais chacun d'eux perd la moitié de la lumière qu'il recevait auparavant. Le même raisonnement s'appliquerait à un nombre quel-

conque de chandelles. Nous en conclurons que l'éclairement d'une surface reste constant quand le nombre des rayons qu'elle reçoit est en raison inverse de leur intensité, et qu'ainsi le degré d'éclairement est en raison composée du nombre et de l'intensité de ces mêmes rayons.

22. — Substituons à cet assemblage de chandelles de simples points lumineux : chacun d'eux sera le sommet d'une pyramide de rayons ayant pour base le papier, dont le degré d'éclairement sera par conséquent proportionnel au nombre de ces points, qui formeront à la fin une surface lumineuse continue, si leur nombre croît et si leur grandeur décroît à l'infini; l'aire de cette surface deviendra l'expression géométrique de leur somme.

Ainsi l'éclairement du papier sera, toutes choses égales d'ailleurs, en raison directe de l'aire de la surface éclairante, que l'on suppose d'un éclat uniforme.

23. — En réunissant toutes ces circonstances, nous voyons que, lorsqu'un objet est éclairé par une surface lumineuse de peu d'étendue, mais cependant d'une grandeur sensible, le degré d'éclairement est proportionnel à

$$\frac{\text{l'aire de la surface lumineuse} \times \text{l'intensité du pouvoir éclairant}}{\text{le carré de la distance à la surface éclairée}}.$$

24. — Le raisonnement précédent s'applique seulement au cas où le disque lumineux est une petite portion de l'aire d'une sphère concentrique avec l'objet éclairé, dont chaque point se trouve alors à égale distance du disque, et dont la surface est perpendiculaire aux rayons lumineux. Quand l'objet est dans une exposition oblique, on peut regarder sa surface comme divisée en une infinité de petites parties, et considérer chacune comme la base d'une pyramide oblique ayant pour sommet un point quelconque du luminaire. La section de cette pyramide par un plan perpendiculaire à l'axe, et passant à la

même distance, est égale au produit de la base par le sinus de l'inclinaison de la base sur l'axe, ou à l'élément de la surface éclairée $\times$ le sinus de l'inclinaison du rayon. Or les rayons qui tombent sur la base sont évidemment égaux en nombre à ceux qui tombent sur la section; et, puisqu'ils doivent se distribuer sur une surface plus étendue, l'intensité de leur effet éclairant sera diminuée dans le rapport de l'aire de la section à celle de la base, ou du sinus de l'inclinaison au rayon. Mais l'éclairement de la section est égal à

$$\frac{\text{l'aire du luminaire} \times \text{l'éclat intrinsèque}}{(\text{la distance})^2} \quad (23);$$

ainsi celui de l'élément de surface égale cette fraction multipliée par le sinus de l'inclinaison du rayon lumineux; ou, en nommant A l'aire du luminaire, I son éclat intrinsèque, D sa distance et θ l'inclinaison, la formule

$$\frac{A \cdot I \sin \theta}{D^2}$$

représentera l'intensité de l'éclairement.

25. — Si L représente la quantité absolue de lumière émise par le luminaire *dans une direction donnée*, ce que l'on pourrait appeler la *lumière absolue*, nous aurons

$$L = A \times I,$$

pourvu que la surface du luminaire soit perpendiculaire à la direction donnée. Si elle ne l'était pas, A désignerait alors l'aire de la section d'un cylindre limité par le contour du luminaire, et ayant son axe parallèle à la direction donnée: conséquemment

$$\frac{L \cdot \sin \theta}{D^2}$$

représente en ce cas l'intensité d'éclairement de la surface élémentaire.

Pour éclaircir ces considérations par une application, nous allons résoudre le problème suivant :

26. — Une petite surface blanche est posée horizontalement sur une table, et éclairée par une chandelle dont la distance, estimée par la projection horizontale, est constante : à quelle hauteur doit se trouver la flamme pour que l'éclairement de la surface soit le plus grand possible? (Voy. fig. 2.)

Soit A la surface, BC la chandelle. Posons

$$AB = a,\ AC = D;\ BC = \sqrt{D^2 - a^2}:$$

puisque l'éclairement de A, toutes circonstances égales d'ailleurs, est comme

$$\frac{\sin CAB}{\overline{AC}^2}$$

ou comme

$$\frac{CB}{\overline{AC}^3} = \frac{\sqrt{D^2 - a^2}}{D^3} = F,$$

nous n'avons qu'à rendre cette quantité un maximum, ou à faire

$$dF = 0, \text{ ou } d(F^2) = 0;$$

ce qui donne

$$d\left\{\frac{1}{D^4} - \frac{a^2}{D^6}\right\} = 0, \text{ ou } -\frac{4}{D^5} + \frac{6a^2}{D^7} = 0,$$

$$2D^2 - 3a^2 = 0, \text{ ou } D = a.\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\text{et } BC = \sqrt{D^2 - a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.707 \times \overline{AB}.$$

27. — *Définition*. La *grandeur apparente* d'un objet est la portion de la surface d'une sphère ayant l'œil pour centre et l'unité pour rayon, interceptée par un cône qui aurait l'objet pour base et l'œil pour sommet.

1. 2.

28. — Ainsi la grandeur apparente d'un petit objet est en raison directe de l'aire d'une section de ce cône, perpendiculaire au rayon visuel, et en raison inverse du carré de la distance de l'objet. Si celui-ci avait sa surface perpendiculaire au rayon visuel, le rapport précédent se réduirait à l'aire de l'objet divisé par le carré de sa distance.

29. — *Définition*. L'*éclat intrinsèque réel* d'un objet lumineux est l'intensité de la lumière de chaque point de sa surface, ou la mesure numérique de la force avec laquelle ce point (de grandeur finie) éclairerait un objet donné à une distance donnée, en choisissant pour unité un certain degré d'éclairement. Quand nous disons simplement l'éclat intrinsèque, nous entendons toujours l'éclat intrinsèque réel.

30. — *Coroll.* 1. Par conséquent le degré d'éclairement d'un objet exposé perpendiculairement aux rayons d'un luminaire est proportionnel à la grandeur apparente de ce luminaire et à son éclat intrinsèque.

31. — *Coroll.* 2. Réciproquement, si ces deux quantités ne changent pas, le degré d'éclairement ne changera pas non plus. Par exemple, l'éclairement dû aux rayons directs du soleil est le même que celui que l'on produirait en plaçant à la distance de dix pieds un cercle d'un pouce de diamètre détaché du disque du soleil, et en supprimant tout le reste de cet astre : en effet, une telle portion circulaire aurait la même grandeur apparente que le soleil tout entier. Cet exemple peut donner une idée du vif éclat du disque solaire.

32. — *Définition*. L'éclat intrinsèque apparent d'un objet ou luminaire est le degré de clarté de son image ou représentation au fond de l'œil : c'est par cette clarté seule que nous jugeons de l'éclat. Un luminaire peut être plus ou moins brillant : si, par une cause quelconque, l'éclairement

de son image dans l'œil est affaibli, son éclat diminuera pour nous dans la même proportion : c'est ainsi que nous pouvons fixer nos regards sur le soleil à travers un verre noir ou les vapeurs de l'horizon.

33. — *Définition*. La lumière absolue d'un luminaire est la somme des aires de chaque élément, multipliées chacune par son propre éclat intrinsèque ; ou si chaque partie de la surface est également éclatante, la lumière absolue est simplement égale au produit de l'aire par l'éclat intrinsèque. C'est la même quantité que nous avons désignée précédemment par L.

34. — *Définition*. La lumière apparente d'un objet est la quantité totale de lumière qui vient frapper notre œil, quelle que soit la manière dont elle se distribue sur la rétine.

Dans le langage ordinaire, quand nous parlons de l'éclat d'un objet d'une grandeur considérable, nous avons toujours en vue son *éclat intrinsèque apparent*.

35. — Cependant, quand l'objet n'a pas de dimensions sensibles, tel qu'une étoile, nous n'avons jamais égard qu'à sa lumière apparente (ou, si je puis m'exprimer ainsi, à son *éclat absolu apparent*), parce que, ne pouvant pas diviser par la vue un semblable objet, notre œil est affecté indistinctement de toute la lumière qui en émane. La même chose a lieu pour tous les petits objets indivisibles. Les auteurs qui ont écrit sur l'optique sont tombés souvent dans la confusion, faute d'avoir observé ces distinctions.

36. — Quand nous nous éloignons d'un luminaire, sa lumière apparente diminue par deux causes :

1° Nos yeux, ayant une grandeur déterminée, présentent une certaine surface à la lumière, et reçoivent par conséquent une quantité de rayons réciproque au carré de la distance.

2° En traversant l'atmosphère, une partie de la lumière se trouve arrêtée et absorbée à cause de la transparence imparfaite de l'air

Néanmoins, nous n'aurons pas encore égard à cette dernière cause. En vertu de la première seulement, la lumière apparente d'un luminaire est donc inversement proportionnelle au carré de la distance, ou directement à la *lumière absolue*.

37. — L'éclat intrinsèque apparent est égal à la lumière apparente divisée par l'aire de l'image qui se peint sur la rétine; mais cette aire est proportionnelle à la grandeur apparente du luminaire, c'est-à-dire à sa surface réelle A divisée par le carré de sa distance D, ou à $\frac{A}{D^2}$. De plus, la lumière apparente, comme nous venons de le voir, est proportionnelle à $\frac{AI}{D^2}$, I désignant l'éclat intrinsèque réel. L'éclat intrinsèque apparent est donc proportionnel à $\frac{AI}{D^2} : \frac{A}{D^2}$, ou simplement à I, et ne dépend ni de A ni de D : il est donc le même pour toutes les distances, et reste toujours proportionnel à l'éclat intrinsèque réel. Cette conclusion est ordinairement énoncée en ces termes dans les traités d'optique, *que les objets paraissent également éclatants à toutes les distances*, ce qui ne doit s'entendre que de leur éclat intrinsèque apparent; encore cette proposition n'est-elle vraie que dans l'hypothèse où la lumière n'éprouverait aucune diminution en traversant un milieu.

38. — L'*angle d'émanation* d'un rayon qui s'échappe d'une surface lumineuse est celui qu'il forme avec cette surface au point dont il émane.

39. — Les physiciens qui se sont occupés d'optique ont long-temps agité la question de savoir si l'intensité de la lumière était la même dans toutes les directions, ou si elle va-

riait avec l'angle d'émanation. Euler, dans ses *Réflexions sur les divers degrés de la lumière du soleil,* etc. (Berlin, Mém., 1750), page 280, a adopté la première opinion.

D'une autre part, Lambert (*Photométrie*, p. 41) prétend que cette intensité de la lumière ou densité des rayons émis par une surface lumineuse dans une certaine direction est proportionnelle au sinus de l'angle d'émanation. Si nous connaissions la nature intime de la lumière et le véritable mécanisme par lequel les corps l'émettent et la réfléchissent, nous pourrions décider la question *a priori;* si nous étions assurés, par exemple, que de chaque molécule de la surface d'un corps émane un rayon de lumière sur lequel les rayons émanés des molécules restantes n'ont aucune influence, et que de plus tous ces rayons se répandent librement dans toutes les directions, alors, puisque chaque point d'une surface plane et lumineuse est visible à l'œil, quelle que soit sa position, oblique ou perpendiculaire au-dessus de ce plan, et lui envoie, dans cette hypothèse, le même nombre de rayons, la *lumière totale* émise par une surface de grandeur déterminée serait la même pour tous les angles d'émanation.

Mais comme la grandeur apparente de cette aire est proportionnelle au sinus de son inclinaison sur le rayon visuel, c'est-à-dire au sinus de son angle d'émanation, cette lumière se distribue sur une moindre surface *apparente* : par conséquent son intensité ou l'éclat apparent de la surface croîtrait en raison inverse du sinus de l'angle d'émanation. D'un autre côté, si, comme il y a lieu de le croire, la lumière n'émane point de la surface des corps, mais d'une certaine profondeur; si ces surfaces elles-mêmes ne sont pas des plans purement mathématiques, mais plutôt une série de points physiques retenus dans leur situation par des forces attractives et répulsives, et si l'intensité de l'émanation de chacun de ces points dépend, jusqu'à un certain degré, de leur liaison mutuelle, il n'y a pas de raison pour supposer *a priori* une égale émanation de lumière dans toutes les directions ;

et, pour trouver la véritable loi, nous devons recourir aux observations directes.

L'astronomie nous apprend que le soleil est une sphère : il en résulte que chaque partie de son disque visible nous paraît sons tous les angles d'inclinaison possibles. Maintenant, si nous examinons sa surface au télescope, elle ne paraît certainement pas plus brillante à la circonférence qu'au centre. Cependant, si l'hypothèse de l'émanation égale était juste, l'éclat devrait aller en croissant à partir du centre, et deviendrait infini sur les bords; de telle sorte que le disque nous paraîtrait entouré d'un anneau d'un éclat infiniment plus vif qne la portion centrale. On peut objecter, à la vérité, et avec raison, que la surface du soleil, quoique généralement sphérique, est couverte d'aspérités dont chacune présente à notre œil toutes les inclinaisons possibles, et que, chaque partie réunissant ainsi toutes les gradations d'éclat dont la lumière est susceptible, le disque total doit nous paraître également resplendissant dans toute son étendue.

40. — Bouguer, dans son *Traité d'optique* (Paris, 1760, page 90), prétend avoir trouvé, par une comparaison directe, que le centre du disque solaire est au contraire *beaucoup plus* lumineux que les bords. Un résultat aussi extraordinaire, et si incompatible en apparence avec tout ce que nous connaissons de la nature du soleil et du mode d'émission de la lumière à sa surface, aurait besoin d'être vérifié par des expériences précises et délicates. S'il était trouvé exact, le seul moyen de l'expliquer serait de supposer une atmosphère dense et imparfaitement transparente, d'une grande étendue, flottant par-dessus les nuages lumineux qui forment la surface visible du disque. L'observation de Bouguer est certainement possible; mais il serait peu philosophique d'avoir recours à un corps que nous connaissons si imparfaitement, et tellement hors de notre portée, pour en faire la base d'une théorie de l'émanation. L'objection que nous avons rappor-

tée plus haut acquiert un nouveau poids quand on examine différentes surfaces.

Si l'on observe au microscope un morceau de papier blanc, on trouvera sa superficie extrêmement inégale, hérissée d'aspérités, et n'ayant pas même l'apparence d'un plan. Il en est de même pour toutes les surfaces assez raboteuses pour réfléchir la lumière dans toutes les directions.

41. — Cependant, comme nous n'avons à parler que de surfaces lumineuses telles que l'on en trouve dans la nature, nous devons prendre leurs propriétés telles qu'on les observe réellement; et, sans chercher quelle pourrait être la loi d'émanation pour une surface mathématique, nous pouvons poser en fait, comme un résultat de l'observation, que *les surfaces lumineuses paraissent également éclatantes, quel que soit l'angle qu'elles forment avec le rayon visuel.*

On peut vérifier cette assertion en observant la surface d'un fer rouge : son *éclat intrinsèque* apparent n'est pas sensiblement augmenté s'il est mis dans une position oblique à l'égard de l'œil.

42. — Si l'on porte dans une chambre obscure une barre de fer carrée et polie, ou plutôt une barre d'argent, ou un cylindre poli de l'un de ces métaux, après l'avoir chauffé au rouge, ce cylindre paraîtra également lumineux au milieu de sa convexité voisine de l'œil et sur ses bords, et on ne pourra le distinguer d'une lame entièrement plane; quoique l'on place la barre carrée de telle manière que deux de ses faces forment avec le rayon visuel des angles différents, elle brille d'un éclat parfaitement égal dans toute sa largeur, et l'on ne peut aucunement apercevoir l'arète qui sépare les faces contiguës. Si l'on fait tourner toute la barre autour de son axe, ce mouvement ne devient sensible que par les variations successives de son diamètre apparent, qui semble croître et décroître suivant que la barre se présente de face ou de côté dans le sens de sa diagonale : son apparence est

toujours celle d'une lame plate perpendiculaire au rayon visuel.

Ces expériences avec des surfaces éclairées artificiellement, et d'autres semblables que le lecteur n'aura pas de peine à imaginer et à faire, ainsi que celles que M. Ritchie a consignées dans le *Journal philosophique d'Edimbourg*, suffisent pour établir le principe énoncé à l'article 41, principe que l'observation de Bouguer sur l'éclat inégal du disque solaire ne peut infirmer d'une manière décisive, comme nous croyons déjà l'avoir prouvé.

43. — Ce qui précède nous fait voir que les surfaces des corps lumineux, ou du moins leurs dernières molécules, n'émettent pas la lumière avec une égale abondance dans toutes les directions; mais qu'au contraire, *l'abondance de l'émission dans une direction quelconque est proportionnelle au sinus de l'angle d'émanation à la surface.*

Problème.

44. — Déterminer l'intensité d'éclairement d'une petite surface plane exposée d'une manière quelconque aux rayons d'un luminaire de grandeur, de figure et de distance donnés, ce luminaire étant supposé d'un éclat uniforme dans toute son étendue.

Concevons la surface du luminaire partagée en une infinité de portions élémentaires, dont chacune pourra être regardée comme une section oblique d'une pyramide ayant pour sommet le centre du plan éclairé infiniment petit B. (Voy. fig. 3.) Soit P Q une de ces portions, et prolongeons la pyramide B P jusqu'à ce qu'elle rencontre le ciel en p; soient encore pq la projection de l'aire P Q, le disque $c\,d\,e\,f$ la projection du luminaire C D E F, et πQ une section de la pyramide A P Q perpendiculaire à l'axe. D'abord le plan B sera éclairé par l'élément P Q comme s'il l'était par une surface π Q également éclatante, en vertu du principe établi en der-

nier lieu : par conséquent P Q équivaut à une surface π Q quant à l'intensité de l'éclat. Ensuite, puisque la grandeur apparente de la surface π Q, vue du point B, est la même que celle de pq, l'aire π Q étant équivalente à une surface pq d'un éclat égal, placée en pq (art. 29, 30, 31; coroll. 1, 2), P Q est aussi équivalente à pq. Le même raisonnement s'applique à chaque élément de la surface; et, puisque la lumière totale reçue par B est la somme de toutes les lumières émises par les éléments du luminaire, la surface entière C D E F doit équivaloir à sa projection *cdef*.

45. — L'éclairement de B ne dépend donc aucunement de la figure ni de la grandeur réelles du luminaire, mais uniquement de sa figure et de sa grandeur apparentes; et quel que soit ce luminaire, nous pouvons toujours lui substituer la portion du ciel dont il tient la place, en supposant à cette portion le même éclat intrinsèque et le même contour.

46. — Ainsi, au lieu du soleil, nous pourrons supposer un petit cercle de même diamètre apparent et doué d'un éclat égal; au rectangle lumineux A G H I (fig. 5), perpendiculaire au plan éclairé B, et d'une hauteur infinie, nous pourrons substituer le secteur sphérique Z A G compris entre les deux cercles verticaux Z A, Z G, et ainsi de suite.

47. — Soit donc pq un rectangle élémentaire d'une surface sphérique, infiniment petit dans ses deux dimensions; désignons-le par d^2 A, et $\iint d^2$ A représentera la surface *cdef*: alors, en posant z = la distance zénithale Zp de ce rectangle, son pouvoir éclairant sera $d^2 A . \cos z$, et celui de toute la surface A sera égal à

$$L = \iint d^2 . A \cos z.$$

48. — *Exemple* 1. Trouver le pouvoir éclairant du sec-

teur Z A G (fig. 3) compris entre l'horizon et deux cercles verticaux.

Nommant θ l'azimuth de l'élément $d^2 A$, si nous considérons cet élément comme terminé par deux verticaux contigus et deux cercles parallèles à l'horizon aussi contigus, nous aurons

$$d^2 A = dz \times d\theta \sin z ;$$

d'où l'on tire

$$L = \iint d\theta \, . \, dz \, . \sin z \cos z = \tfrac{1}{2} \iint d\theta \, . \, dz \sin 2z \, .$$

$$= \tfrac{1}{2} \int (\theta + C) \, dz \, . \sin 2z .$$

Etendant cette intégrale depuis $\theta = o$ jusqu'à $\theta = AG$, ce qui comprend toute l'amplitude du secteur, nous trouverons, en notant par a cette amplitude,

$$L = \frac{a}{2} \int dz \, . \sin 2z = \frac{a}{2} (C - \tfrac{1}{2} \cos 2z).$$

Cette intégrale, étant prise depuis $z = o$ jusqu'à $z = 90°$, donnera simplement

$$L = \frac{a}{2}.$$

49. — *Coroll.* 1. Cette quantité est la mesure du pouvoir éclairant du secteur, en représentant celui d'une surface infiniment petite (A), placée au zénith, par cette surface même. En effet, dans ce cas,

$$\cos z = 1 \text{, et} \iint d^2 A \, . \cos z = A.$$

50. — *Coroll.* 2. En conservant la même mesure du pouvoir éclairant, celui de tout l'hémisphère est égal à π, π ayant pour valeur 3 . 14159535.

51. — *Exemple* 2. Quel est le pouvoir éclairant d'une portion circulaire du ciel, dont le centre est le zénith ?

Nommant z la distance zénithale d'un certain élément, et θ son azimuth, nous aurons, comme auparavant,

$$d^2 A = d\theta \cdot dz \cdot \sin z;$$

et par conséquent

$$L = \iint d\theta \, dz \sin z \cdot \cos z \cdot = \int \theta \cdot \frac{dz \cdot \sin 2z}{2} = \pi \int dz \cdot \sin 2z.$$

En étendant cette intégrale depuis $\theta = o$ jusqu'à $\theta = 2\pi$,

$$L = \pi \,(\text{const.} - \tfrac{1}{4} \cos 2z);$$

en supposant que L s'évanouisse pour $z = o$, l'équation précédente devient

$$L = \frac{\pi}{2}(1 - \cos 2z) = \pi \sin^2 z.$$

52. — *Coroll.* 5. Le pouvoir éclairant d'un luminaire circulaire qui a le zénith pour centre est proportionnel au carré du sinus de son demi-diamètre apparent.

55. — *Exemple* 3. Quel est le pouvoir éclairant d'une portion circulaire quelconque de la voûte céleste?

Soit T K L M le cercle éclairant; concevons-le décomposé en anneaux concentriques, tels que X Y Z (fig. 4); soit Xx un parallélogramme infiniment petit, terminé par deux rayons contigus S X et Sx, S étant le centre : posons

$$ZS = a, \quad SX = x, \quad ZX = z.$$

$$\text{Angle } ZSX = \varphi, \quad ST = r.$$

$$\text{Aire } d^2 A = Xx = dx \times d\varphi \sin x.$$

$$L = \iint d\varphi \cdot dx \cdot \sin x \cdot \cos z.$$

Mais, par les formules de la trigonométrie sphérique,

$$\cos z = \cos a \cdot \cos x \cdot + \sin a \cos x \cos \varphi.$$

Par conséquent

$$L = \iint dx \, . d\varphi \, . \sin x \, (\cos a \cos x + \sin a \, . \sin x \, . \cos \varphi).$$

La première intégration, effectuée par rapport à φ entre les limites $\varphi = 0$ et $\varphi = 360°$ ou 2π, donne

$$L = \int dx \, . \sin x \times 2\pi \, . \cos a \, . \cos x.$$

Cette équation, étant intégrée par rapport à x, en étendant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \mathrm{ST} = r$, donnera

$$L = \frac{\pi \, . \cos a}{2} \, (1 - \cos 2r) = \pi \, . \cos a \, . \sin^2 r.$$

Ce résultat est singulièrement élégant et remarquable : il nous apprend que, pour obtenir, par rapport à un plan horizontal, l'effet éclairant d'un luminaire circulaire d'un diamètre apparent quelconque, et placé à une hauteur quelconque, nous n'avons qu'à réduire l'effet éclairant qu'il posséderait s'il avait le zénith pour centre, dans le rapport du rayon au cosinus de la distance zénithale ou au sinus de la hauteur.

Le lecteur pourra trouver d'autres exemples dans la *Photométrie* de Lambert, chap. 2, d'où nous avons tiré ceux-ci.

54. — Si la surface éclairante n'avait pas le même éclat intrinsèque dans toute son étendue, en notant par I l'éclat intrinsèque de l'élément $d^2 A$, nous aurions pour expression générale du pouvoir éclairant de la surface A

$$L = \iint I \, d^2 A \cos z.$$

La lune, Vénus et Mercure dans leurs phases, le ciel pendant le crépuscule, nous offrent des exemples de surfaces inégalement éclatantes, quand on les considère comme des luminaires.

Problème.

55. — Comparer l'éclairement d'un plan horizontal par

la lumière du soleil supposé au zénith, avec celui du même plan lorsque tout le ciel deviendrait aussi brillant que le soleil.

D'après l'art. 53, nous avons

$$L = \pi \cos a \cdot \sin^2 r :$$

En désignant donc par L et L' les deux éclairements en question, nous aurons

$$L : L' :: \pi \times \cos 0^\circ \cdot \times (\sin \text{dem. diam. du soleil})^2$$
$$: \pi \times \cos 0^\circ \cdot \times \sin^2 \cdot 90^\circ.$$
$$:: \sin^2 16' : 1 :: 1 : 46166.$$

56. — L'éclairement d'un plan en contact avec la surface du soleil est le même que celui d'un plan à la surface de la terre, éclairé par un hémisphère entier d'un éclat égal à celui du soleil au zénith : nous voyons par là que l'éclairement d'un plan semblable serait près de 50,000 fois plus grand que celui de la terre sous l'équateur, à l'heure de midi. Tel serait l'effet (par rapport à la lumière seulement) du contact immédiat de la terre et du soleil.

57. — Pour mesurer l'intensité d'une lumière donnée, l'on a imaginé divers instruments nommés *photomètres*, qui, pour la plupart, laissent beaucoup à désirer sous le rapport de l'exactitude. Quelques uns sont essentiellement défectueux en principe, c'est-à-dire qu'ils donnent la mesure non du pouvoir éclairant, mais du pouvoir échauffant des rayons de lumière ; et par conséquent ils ne méritent pas le nom de *photomètres*.

58. — Nous ne connaissons aucun instrument ni appareil tel que la lumière puisse lui communiquer un mouvement mécanique susceptible de graduation, ou à l'aide duquel on puisse lire à chaque instant l'intensité ou la quantité de la lumière. Nous sommes obligés, pour évaluer les divers degrés de clar-

té, de nous en rapporter uniquement à l'œil, et de juger de l'intensité des rayons lumineux par l'impression qu'ils produisent sur l'organe de la vue. Mais l'œil, quoique extrêmement sensible aux moindres variations de la clarté, est par-là même peu capable de comparer entre eux plusieurs degrés d'éclairement, de mesurer leurs intensités, ou même de reconnaître leur identité lorsqu'il en est affecté à différents intervalles, surtout si ces intervalles sont assez longs. Dans ce sens, l'œil ne peut pas plus servir à donner la mesure de la lumière que la main à donner le poids d'un corps pris au hasard. Cette incertitude s'accroît encore par la nature même de l'organe, qui est dans un état de fluctuation continuelle, dû à l'ouverture plus ou moins grande de la pupille, qui se contracte ou se dilate par l'excitation de la lumière même, et à la sensibilité variable des nerfs optiques. Que l'on compare seulement l'éclat éblouissant d'un éclair dans une nuit obscure avec la sensation produite en plein jour par la même cause : dans le premier cas, l'œil est péniblement affecté, et l'agitation violente qu'éprouvent les nerfs de la rétine se manifeste encore quelques instants après à notre imagination par une succession rapide et alternative de lumière et d'obscurité. Pendant le jour, il ne se produit point d'effet semblable, et nous suivons les zig-zags de la foudre avec la plus grande facilité, et sans être frappés de cet éclat prodigieux que fait ressortir si vivement l'obscurité qui précède et qui suit l'éclair.

59. — Ces inconvénients ne sont pas les seuls que nous ayons à signaler. Quand deux objets inégalement éclairés, tels que deux papiers blancs, par exemple, sont présentés conjointement à la vue, quoique nous nous prononcions à l'instant sur l'existence d'une différence, nous ne sommes pas en état de l'assigner, et nous disons seulement que l'un est plus éclairé que l'autre. Eclairez la moitié d'une feuille de papier avec une seule chandelle, et l'autre moitié avec plusieurs chandelles, la différence sera manifeste; mais si l'on demande à

plusieurs personnes de deviner, d'après cette seule apparence, le nombre des chandelles qui éclairent chaque moitié, il est probable qu'il n'y en aura pas deux qui s'accorderont. Bien plus, la même personne ne portera pas le même jugement toutes les fois. Cette incertitude vient augmenter encore la difficulté des estimations de la photométrie, et semble faire de cette partie l'une des plus délicates et des plus difficiles de l'optique.

60. — Cependant, dans des circonstances favorables, l'œil juge assez exactement de l'égalité de deux degrés de clarté perçus simultanément : à l'aide de cette faculté de l'œil, et en usant de précautions convenables, nous pourrons obtenir une appréciation exacte des intensités relatives de toute espèce de lumières. Nous allons examiner maintenant quelles sont ces circonstances favorables.

61. — 1° Les degrés de clarté à comparer doivent être d'une intensité modérée. On ne peut porter un jugement assuré si la clarté est si vive qu'elle éblouit, ou tellement faible qu'elle échappe à la vue.

Il est donc rarement avantageux de comparer directement deux luminaires; il est généralement plus commode de recevoir leurs lumières sur une surface blanche, et de juger de leur intensité relative par l'effet produit, d'après l'axiôme :

62. — *Que deux luminaires sont égaux en lumière absolue quand ils éclairent avec une égale intensité une surface blanche dont ils se trouvent également éloignés, ou deux surfaces blanches égales et semblables, placées à des distances respectivement égales.*

63. — 2° Les luminaires ou les surfaces éclairées que l'on compare doivent avoir la même grandeur apparente, une figure semblable, et des dimensions assez étroites pour que la clarté soit sensiblement uniforme dans toute leur étendue.

64. — 3° Ces surfaces doivent être assez rapprochées pour se toucher, de telle sorte que la ligne droite qui les sépare soit bien tranchée.

65. — 4° Elles doivent être vues ensemble par le même œil.

66. — 5° Toute autre lumière que celle des objets éclairés doit être soigneusement écartée.

67. — 6° Les lumières qui éclairent les deux surfaces doivent avoir la même couleur. Entre deux lumières diversement colorées, on ne peut établir aucun parallèle susceptible de précision; et l'incertitude de notre jugement est d'autant plus grande que cette différence de coloration est plus considérable.

68. — Quand toutes ces conditions se trouvent satisfaites, nous pouvons nous prononcer avec certitude sur l'égalité ou l'inégalité de deux clartés. Quand on ne peut apercevoir la limite qui les sépare, en approchant ou en éloignant l'œil, on peut être certain que les deux lumières sont égales.

69. — Bouguer, dans son *Traité d'optique* (1760, page 35), a fait servir ces principes à la mesure ou plutôt à la comparaison de différents degrés de clarté. Deux surfaces de papier blanc, égales en grandeur, découpées dans la même feuille, et par conséquent égales en pouvoir réfléchissant, sont éclairées l'une par la lumière dont on veut mesurer le pouvoir éclairant, l'autre par une lumière dont on peut faire varier l'intensité à volonté en augmentant la distance, et qui, en vertu de cette disposition, est susceptible d'une appréciation rigoureuse. On approchera ou l'on éloignera la lumière mobile jusqu'à ce que les deux surfaces paraissent également éclairées, et l'on obtiendra la mesure cherchée, connaissant la distance entre les deux luminaires, que l'on aura mesurée par mesure directe ou autrement.

70. — M. Ritchie a fait récemment une application aussi élégante que simple de ce dernier principe. Son photomètre consiste en une boîte rectangulaire d'un pouce et demi ou deux pouces d'équarrissage, ouverte aux deux bouts, et dont A B C D (fig. 5) représente une section. Cette boîte est noircie en dedans, pour absorber toute lumière étrangère. Elle renferme deux miroirs plans rectangulaires, F C, F D, inclinés de 45 degrés sur l'axe de la boîte, et se joignant en F au milieu d'une fente étroite E F G d'environ un pouce de long et un huitième de pouce de large, recouverte d'un tissu très fin ou de papier huilé. Les miroirs proviennent tous deux d'une même glace, pour que leur pouvoir réfléchissant soit parfaitement égal. On placera en F dans la fente rectangulaire un morceau de carte noire, pour prévenir la confusion des rayons réfléchis par chaque miroir.

71. — Supposons que l'on veuille comparer le pouvoir éclairant de deux sources de lumière (de deux flammes, par exemple) P et Q : elles doivent être placées à une certaine distance l'une de l'autre, et l'instrument entre deux, de telle sorte que la lumière de chaque luminaire tombe sur le miroir le plus voisin, et soit réfléchie sur la partie du papier E F ou F G qui y correspond. Il faut alors approcher l'instrument de l'un ou de l'autre luminaire, jusqu'à ce que le papier paraisse également éclairé de chaque côté de la division F. Pour mieux atteindre ce but, on regarde à travers un tube prismatique noirci intérieurement, dont on applique une extrémité tout-à-fait contre l'œil, et l'autre contre la partie supérieure A B du photomètre. Au moment où les deux lumières sont d'une égalité parfaite, il est évident que le pouvoir éclairant de chaque luminaire est en raison directe du carré de sa distance au milieu du photomètre.

72. — A l'aide de cet instrument, on peut se convaincre facilement que la lumière décroît avec le carré de la distance : car, si l'on place 4 chandelles en P, aussi rapprochées

que possible et brûlant avec la même vivacité, et une 5[e] chandelle en Q, on trouvera que les portions EF et GF du papier seront également éclairées quand les distances PF, QF, seront entre elles :: 2 : 1 ; et cette loi continue à se vérifier, quel que soit le nombre des chandelles placées de chaque côté du photomètre.

73. — Pour rendre la comparaison des lumières plus exacte, on les ramènera plusieurs fois de suite au point d'égalité, en retournant chaque fois l'instrument dont les deux extrémités changeront de place. La moyenne entre toutes les déterminations de distances obtenues de cette manière approchera sensiblement de la vérité.

74. — Quelquefois on préfère couvrir la surface des miroirs en y collant une bande de papier, de manière à présenter deux surfaces obliques de papier blanc formant des angles égaux avec la lumière incidente : dans ce cas, on ôte le papier qui fermait l'ouverture EFG, et l'on compare les surfaces blanches. Un des avantages de cette disposition est d'éviter de laisser entre les deux moitiés de l'ouverture un intervalle noir qui rend peut-être moins sûre la comparaison exacte de leurs degrés d'éclairement.

75. — Si les lumières que l'on compare sont diversement colorées, comme la lumière du soleil, de la lune ou d'une chandelle, il est impossible de les rendre exactement pareilles (art. 67). La meilleure manière de faire usage de l'instrument, dans ce cas, est de le tourner jusqu'à ce que l'un des côtés de la fente paraisse visiblement le plus éclairé, malgré la différence de coloration des lumières; puis de faire mouvoir l'instrument en sens contraire, jusqu'à ce que l'autre côté devienne à son tour le plus éclatant. La position moyenne entre ces deux points doit être considérée comme le véritable point d'éclairement égal.

76. — Si l'on voulait comparer les degrés d'éclairement

ou d'éclat intrinsèque de deux surfaces, il faudrait isoler une portion déterminée de chacune et la soumettre à l'examen : on atteindrait ce but en adaptant aux ouvertures du photomètre deux tubes noircis d'égale longueur, et terminés par des orifices d'égale surface, ou sous-tendant des angles égaux ayant leur sommet au centre de l'instrument. Ces tubes limitant, sur les surfaces éclairées, des portions de même grandeur apparente, on pourra rendre leurs lumières égales sur le papier huilé de la fente EF, comme dans le cas des chandelles, etc. (Bouguer, *Traité*, page 31.)

77. — Le comte de Rumford a proposé une autre méthode de comparer l'intensité d'éclat de deux luminaires (fig. 8), qui joint la commodité à l'exactitude, et présente de grands avantages dans certaines circonstances. (Voy. les *Transactions philosophiques.*, vol. 84, page 67.)

Elle est fondée sur l'égalité des *ombres* projetées par l'interposition de corps opaques entre les luminaires et une surface blanche éclairée par tous les deux en même temps. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de comparer le pouvoir éclairant de deux flammes L et *l*, de différente grandeur, ou produites par des combustibles de différente nature, comme la cire et le suif. Devant un écran CD de papier blanc, dans une chambre obscure, placez un petit bâton noir de forme cylindrique, et derrière ce bâton les deux flammes L et *l*, de manière à projeter sur l'écran les ombres A B, éloignées l'une de l'autre d'une quantité à peu près égale à la largeur de chaque ombre. De plus, l'inclinaison des rayons incidents L S A et *l* S B sur la surface de l'écran doit être exactement la même. On doit alors reculer la flamme la plus éclatante ou rapprocher la plus faible, jusqu'à ce que les deux ombres paraissent de même intensité, et mesurer la distance de ces ombres ou de l'écran à chaque flamme, dont le pouvoir éclairant sera proportionnel au carré de cette distance. La raison en est évidente : l'ombre qui résulte de chaque flamme est éclairée par la lumière de l'autre flamme. La clarté

de l'écran est la somme des clartés produites par les deux flammes : l'œil juge, dans ce cas, de la diminution d'éclat de cette somme; et, si elle est la même pour chaque ombre, il est clair que les clartés restantes doivent être égales.

78. — Cette méthode devient incertaine quand les lumières sont d'une grandeur considérable et très près de l'écran; les pénombres ne permettent pas de comparer bien exactement les intensités relatives du centre des ombres. Cet inconvénient devient encore plus sensible lorsque les lumières diffèrent considérablement en couleur; et, dans ce cas, la méthode devient presque impraticable. Ses avantages, cependant, tels que la promptitude de ses résultats et la simplicité de son appareil, puisqu'il n'est besoin, pour s'en servir, que d'objets que l'on a toujours sous la main (car la couleur noire du bâton, quoique préférable, n'est pas absolument nécessaire), la rendent souvent très utile, à défaut d'instruments plus précis.

79. — Il peut arriver que les lumières à comparer ne soient pas mobiles, ou qu'on ne juge pas à propos de les rendre telles : dans ce cas, on parviendra à donner aux ombres la même intensité en inclinant l'écran sous différents angles avec les directions dans lesquelles il reçoit la lumière de chaque luminaire, et en notant les angles d'inclinaison des rayons incidents. Les pouvoirs éclairants seront alors respectivement en raison directe du carré des distances et en raison inverse des sinus des angles d'inclinaison.

80. — Quand un faisceau de rayons lumineux traverse un espace vide ou un milieu parfaitement homogène, sa direction est rectiligne, comme nous l'avons déjà vu, et sa vitesse uniforme; mais, lorsqu'il rencontre un obstacle ou un milieu nouveau, il éprouve des changements ou modifications que l'on peut classer comme il suit :

Le faisceau se partage en plusieurs autres, qui prennent

chacun un chemin différent, c'est-à-dire qui sont diversement modifiés.

81. — Ceux de la première espèce sout *réfléchis régulièrement*, et poursuivent leur route après cette réflexion, entièrement hors du nouveau milieu.

82. — Ceux de la seconde et de la troisième espèce sont réfractés régulièrement, c'est à-dire qu'ils pénètrent dans le milieu, et qu'ils y poursuivent leur marche en obéissant aux lois de la réfractiou. Dans plusieurs milieux, ils suivent précisément la même route, et peut-être ne pourra-t-on jamais les distinguer entre eux.

Pour de tels milieux, au nombre desquels on compte la plupart des liquides et des substances non cristallisées, la réfraction est dite *simple*. Dans plusieurs autres, tels que la plupart des cristaux, les rayons suivent des routes diverses, et prennent par-là des caractères physiques différents : dans ce cas, la réfraction est dite *double*.

83. — Les rayons de la quatrième espèce se répandent dans toutes les directions, les uns entrant dans le milieu et formant un hémisphère lumineux à l'intérieur, et les autres produisant un hémisphère semblable à l'extérieur. Ce sont eux qui rendent la surface des corps visible à l'œil, quelle que soit sa position à l'égard de ces corps : ils sont donc d'une grande importance dans le phénomène de la vision.

84. — De tous ces rayons qui passent dans le milieu, une partie plus ou moins considérable est *absorbée*, éteinte ou perdue, sans changer de direction : cette absorption ne se fait pas tout d'un coup, mais progressivement, à mesure que la lumière pénètre plus profondément dans la substance. Dans les corps parfaitement opaques, tels que les métaux, l'absorption est totale, et a lieu à une profondeur inappré-

ciable; néanmoins, l'on a de fortes raisons de croire qu'elle se fait graduellement.

Dans les cristaux, du moins dans les cristaux colorés, l'absorption se fait d'une manière différente pour les deux moitiés du rayon réfracté régulièrement, et selon des lois que nous expliquerons en traitant de l'absorption de la lumière.

85. — Excepté dans quelques circonstances particulières, les parties régulièrement réfractées d'un rayon blanc, c'est-à-dire d'un rayon solaire, se décomposent en une multitude de rayons de diverses couleurs, qui diffèrent d'ailleurs par leurs propriétés physiques; chacun de ces rayons poursuit ensuite sa route, indépendamment de tous les autres, et selon les lois de la réfraction régulière ou de la réflexion. Les lois de cette décomposition ou *dispersion* des rayons colorés, et leurs propriétés physiques et sensibles, seront exposées à l'article *Chromatisme*.

86. — Toutes les parties du rayon lumineux régulièrement réfléchies ou réfractées subissent plus ou moins une certaine modification nommée *polarisation*, en vertu de laquelle elles présentent, à leur rencontre avec un nouveau milieu, des phénomènes de réflexion et de réfraction différents de ceux qui résultent de la lumière non polarisée. En général, la lumière polarisée suit les mêmes lois que celle qui ne l'est point, quant à la réflexion, à la réfraction, et aux directions que prennent les rayons de diverses espèces, dans lesquels elle se partage en rencontrant un nouveau milieu; mais ces rayons diffèrent, quant à leur intensité relative, suivant la position de la surface du milieu et de certaines lignes imaginaires ou axes intérieurs, par rapport aux rayons incidents de la lumière polarisée.

87. — Dans certaines circonstances, les rayons exercent une influence mutuelle, qui accroît, diminue ou modifie leurs

effets respectifs d'après des lois particulières : cette influence mutuelle s'appelle *interférence* des rayons de lumière. Nous traiterons successivement de toutes ces modifications, en commençant par la réflexion régulière de la lumière.

---

§ III. — *De la réflexion régulière de la lumière non polarisée sur des surfaces planes.*

Lois de la réflexion ; — Démontrées par l'expérience. — Equations générales de la réflexion sur deux plans : — Valeur de ces symboles. — Cas où deux réflexions se font dans le même plan. — Cas où les plans des deux réflexions sont à angles droits.

88. — Quand un faisceau de lumière tombe sur une surface lisse et polie, une partie des rayons qui le composent est réfléchie régulièrement, et continue sa route en ligne droite hors du milieu réfléchissant. La direction et l'intensité de ces rayons seront l'objet de nos recherches dans cette section, réservant pour un chapitre plus éloigné l'examen des propriétés physiques que le rayon acquiert par l'acte de la réflexion.

Nous commencerons par la direction de la lumière réfléchie ; elle est déterminée par les lois suivantes :

Lois de la réflexion.

89. — *Première loi.* Quand la surface réfléchissante est plane, élevez une perpendiculaire au point d'incidence : le rayon réfléchi sera dans le même plan que le rayon incident et la perpendiculaire, avec laquelle il formera le même angle, mais du côté opposé.

90. — Le plan déterminé par la perpendiculaire et le rayon incident se nomme *plan d'incidence*.

91. — L'angle entre le rayon incident et la perpendiculaire se nomme *angle d'incidence*.

92. — Le plan qui contient à la fois la perpendiculaire et le rayon réfléchi s'appelle *plan de réflexion*, et l'angle entre la perpendiculaire et le rayon réfléchi, *angle de réflexion*.

93. — En adoptant ces dénominations, la loi de réflexion sur une surface plane peut s'énoncer en disant que le plan de réflexion est le même que celui d'incidence; que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, mais situé de l'autre côté de la perpendiculaire.

Corollaire. Le rayon réfléchi et le rayon incident sont également inclinés sur la surface au point d'incidence.

94.— *Seconde loi.* Quand la surface est courbe, la direction du rayon réfléchi est la même que s'il avait subi la réflexion au point d'incidence sur le plan tangent en ce point, c'est-à-dire que, si l'on élève une perpendiculaire à la surface courbe au point d'incidence, le rayon réfléchi sera dans le plan d'incidence, et l'angle de réflexion sera égal à l'angle d'incidence.

95. — Ces lois peuvent se démontrer par l'expérience. Si nous laissons pénétrer un rayon solaire à travers un très petit trou percé dans le volet d'une chambre obscure, et que nous l'y recevions sur une surface polie de verre ou de métal, nous trouverons aisément, à l'aide d'instruments convenables, que les inclinaisons du rayon incident et du rayon réfléchi sur la surface sont égales; mais cette méthode est grossière. Les observations astronomiques vérifient la loi d'une manière plus délicate. Les astronomes ont coutume d'observer directement les hauteurs des astres, au-dessous de l'horizon, et de mesurer en même temps l'abaissement apparent au-dessous de l'horizon de leurs images réfléchies à la surface du mercure, surface nécessairement horizontale. L'abaissement ainsi observé se trouve toujours parfaitement égal à la hau-

teur, quelle que soit sa grandeur ou sa petitesse. Comme ces observations, faites avec de grands instruments, sont susceptibles d'une précision presque géométrique, l'on peut regarder la loi de la réflexion comme l'une des lois naturelles les mieux établies.

96. — La réflexion sur une surface courbe peut être considérée comme étant produite par la portion infiniment petite commune à la surface et au plan tangent au point d'incidence : ainsi la perpendiculaire à la surface en ce point doit former des angles égaux avec les rayons incident et réfléchi.

Problème.

97. — Trouver la direction d'un rayon lumineux après un nombre quelconque de réflexions sur des surfaces planes données de position.

Construction. Puisque la direction du rayon est la même, s'il est réfléchi par les surfaces données ou par des surfaces parallèles, concevons des plans parallèles menés par le point C (fig. 9), et abaissons de C les droites CP, CP′, CP″, etc., respectivement perpendiculaires à ces plans, et entièrement extérieures aux milieux réfléchissants. Menons SC parallèle au rayon quand il tombe sur la première surface, et dans le plan SCP, de l'autre côté de CP, construisons l'angle $PCs' = PCS$: alors Cs' sera la direction du rayon après sa réflexion à la première surface. Prolongeons s' C vers S′, et S′C représentera la direction du rayon au moment de son incidence sur la seconde surface, qui a pour normale la droite CP′. Faisons maintenant dans le plan S′CP″ l'angle $P'Cs''$, mais de l'autre côté de CP′, égal à l'angle S′CP′, et Cs'' représentera le rayon au moment de sa réflexion à la seconde surface; et en prolongeant Cs'' vers S″, s''C le représentera au moment de son incidence sur la troisième surface, dont la normale est CP″. Il en sera de même pour le plan S″CP″; de l'autre côté de CP″, faisons

l'angle $P'' C s''' = P'' C S''$, et $C s'''$ sera la direction du rayon quand il aura quitté la troisième surface, et ainsi de suite.

98. — *Démonstration.* Autour de C comme centre, concevons une surface sphérique (fig. 10) : le plan $P S s$ la coupera suivant le grand cercle $P S S' p$, et le plan des droites $C P$, $C P'$, ou celui qui tombe à angles droits sur les deux premiers plans réflecteurs, ainsi que les plans $S' C s''$ et $S C s''$, la couperont également suivant les grands cercles $P P' p$, $S P'' s''$ et $S k s''$.

Puisque $C P$ et $C P'$ sont des directions données, l'arc $P P'$ (qui est égal à *l'inclinaison des deux surfaces l'une sur l'autre*) est aussi donné. Nommons-le I : or, puisque la direction $S C$ du rayon incident est donnée, *l'angle d'incidence* α ou *la première surface* $P C S$, et l'angle $S P P' = \psi$ ou *l'inclinaison du plan de première réflexion sur le plan* $P P'$ *perpendiculaire aux deux surfaces*, sont également donnés. Ainsi, dans le triangle sphérique $P P' S'$, nous avons $P P' = I$, $P S' = 180° - \alpha$, et l'angle $P' P S' = \psi$: l'on connaît donc $S' P'$ ou $2 S' P' = S' s''$, et l'angle $S S' P'$, ainsi que l'angle $P P' S'$ ou son supplément $P P' s''$, qui est l'angle formé avec le plan $P P'$ par le rayon, après sa seconde réflexion. Or, dans le triangle sphérique $S S' s''$, nous avons $S S' = 180° - 2\alpha$, $S' s'' = 2 S' P'$, et l'angle compris $S S' s''$, d'où l'on peut conclure le troisième côté $S s''$, qui est l'arc entre le rayon incident et le rayon réfléchi deux fois.

Si l'on suppose une troisième réflexion, les données seront $P' S'' = 180° - S' P'$, $P' P'' = I'$, et l'angle $S'' P' P'' = S' P' P'' = P P' P'' - P P' S'$: ce qui permettra de calculer $S'' P''$ en suivant la même marche que ci-dessus. On étendra facilement ce raisonnement à un nombre quelconque de surfaces réfléchissantes.

99. — En nous bornant cependant au cas de deux réflexions, et posant $P' S' = \alpha' =$ *l'angle d'incidence sur la se-*

conde surface réfléchissante, $PS'P'=\theta$, $PP'S'=\varphi$, et $180°-Ss''=D=$ *la déviation du rayon après la seconde réflexion*, nous aurons, par les formules de la trigonométrie sphérique, les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} -\cos\alpha' &= \cos\alpha \,.\, \cos I - \sin\alpha \,.\, \sin I \,.\, \cos\psi \\ \sin\theta &= \frac{\sin I}{\sin\alpha'} \,.\, \sin\psi \\ \sin\varphi &= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \,.\, \sin\psi \\ \cos D &= \cos 2\alpha \,.\, \cos 2\alpha' - \sin 2\alpha \,.\, \sin 2\alpha' \,.\, \cos\theta \end{aligned}\right\} (A)$$

Ces équations serviront à déterminer quatre des sept quantités α, α', I, θ, φ, ψ, D, quand les trois autres seront données.

100. — On observera que φ *est l'angle entre le plan de seconde réflexion et la section principale des deux plans réflecteurs, et* θ *l'angle entre les plans de première et de seconde réflexion.* Si l'on ne cherchait que φ et D, θ devrait être considéré comme un simple angle auxiliaire; mais ce cas n'arrive pas toujours, et quelquefois même c'est seulement de l'angle θ que l'on a besoin, ou il fait partie des données du problème, etc. En un mot, les équations précédentes renferment toutes les conditions d'où dépend la réflexion sur deux plans.

101. — *Corollaire*. Si $\psi=0$, ou si le rayon incident coïncide avec la section principale PCP, c'est-à-dire si les réflexions ont lieu toutes deux dans le plan perpendiculaire aux surfaces réfléchissantes, ces formules prennent une forme très simple : car nous avons alors

$$\theta=0,\ \varphi=180°,\ \cos\alpha'=-\cos(\alpha+I);$$

d'où

$$\alpha+\alpha'=180°-I,$$

et par conséquent

$$\cos(2\alpha + 2\alpha') = \cos(360^\circ - 2I) = \cos 2I,$$
$$\text{ou } 2\alpha + 2\alpha' = 2I.$$

Mais, puisque $\theta = 0$, nous avons, en vertu de la dernière des équations (A),

$$\cos D = \cos 2(\alpha + \alpha');$$

par conséquent

$$D = 2\alpha + 2\alpha' = 2I.$$

Ce qui veut dire que, dans ce cas, la déviation après deux réflexions est double de l'inclinaison des plans réflecteurs, quelle que soit d'ailleurs la direction originaire du rayon. Cette élégante propriété sert de fondement à la théorie du sextant ordinaire et du cercle à réflexion, et paraît avoir été appliquée pour la première fois à la mesure des angles par Hadley, quoique Newton paraisse l'avoir proposée pour le même objet. (Voy. la description de ces instruments.)

102. — Dans d'autres cas, cependant, la déviation D est toujours fonction des angles qui déterminent la position du rayon incident, et ne peut être obtenue qu'à l'aide des équations (A).

Problème.

103. — Etant donnés les angles d'incidence sur les deux plans et l'angle entre les plans de première et de seconde réflexion, assigner la position du rayon incident et du rayon deux fois réfléchi, la déviation du rayon après deux réflexions et l'angle des surfaces réfléchissantes.

En conservant la même notation, les données seront α, α', θ, et les inconnues I, D, φ et ψ.

1° D est donné sur-le-champ par la dernière des équations générales (A).

2° Pour trouver les autres, posons

$$x = \sin I, \; y = \sin \psi, \text{ et } a = \sin \alpha' . \sin \theta ;$$

faisons aussi

$$\cos \alpha = c, \; \sin \alpha = s ; \; \cos \alpha' = c', \; \sin \alpha' = s' :$$

nous aurons alors

$$xy = a, \text{ ou } y = \frac{a}{x},$$

et la première des équations (A) donnera

$$-c' = c\sqrt{1 - x^2} - s\sqrt{x^2 - a^2} ;$$

d'où l'on tire, après l'évanouissement des radicaux et les réductions,

$$o = x^4 + x^2 \, [2c'^2(c^2 - s^2) - 2c^2 - 2a^2s^2] + (c'^2 - c^2)^2 + 2a^2s^2(c'^2 + c^2) + a^4s^4.$$

Cette équation, quoique du quatrième degré, peut se résoudre à la manière de celles du second, et contient la solution générale du problème.

104. — *Coroll.* 1. — Si $\theta = 90°$, ou si les plans de première et de seconde réflexion sont à angles droits, nous avons simplement

$$\sin I . \sin \psi = \sin \alpha', \text{ et } a = \sin \alpha' = s'.$$

Dans ce cas, notre équation finale devient

$$o = x^4 - 2x^2(1 - c^2c'^2) + (1 - c^2c'^2)^2$$

Celle-ci, étant un carré parfait, donne

$$x^2 = 1 - c^2c'^2 ;$$

mais

$$x = \sin I :$$

donc

$$x^2 = 1 - \cos^2 I ;$$

et nous trouvons ce résultat très simple :

$$\cos I = c\,c' = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha'.$$

Ce qui nous apprend que le cosinus de l'inclinaison des plans l'un sur l'autre est égal au produit des cosinus des angles d'incidence sur chacun d'eux. Et réciproquement, cette dernière relation suppose que les plans des deux réflexions sont à angles droits, car l'on a d'abord

$$x^2 = 1 - c^2\,c'^2;$$

en substituant, au lieu de x^2, cette valeur dans l'équation générale, elle doit s'évanouir entièrement, et l'on trouve pour déterminer a une équation du deuxième ou du quatrième degré, qui doit évidemment être satisfaite en prenant $a = \sin\alpha'$, et par conséquent $\theta = 90°$.

Cette élégante propriété trouvera son application quand nous traiterons de la lumière polarisée.

105. — *Coroll.* 2. Dans le même cas, si $\theta = 90°$, la déviation D est donnée par l'équation

$$\cos D = \cos 2\alpha \,.\, \cos 2\alpha';$$

c'est-à-dire que le cosinus de la déviation est égal au produit des cosinus du double de chaque angle d'incidence.

Problème.

106. — Un rayon de lumière est réfléchi par chacun des deux plans, de telle manière que les angles d'incidence et de réflexion sont égaux. L'inclinaison des plans et les angles d'incidence sont donnés : on demande 1° la déviation, 2° l'inclinaison mutuelle des plans de première et de seconde réflexion, et les angles formés par chacun de ces plans, avec la section principale des plans réflecteurs.

En conservant la même notation, nous avons $\alpha = \alpha'$, et par conséquent $\psi = \varphi$, en vertu de la troisième des équations (A), qui deviennent

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha\,(1+\cos I) = \sin\alpha \,.\, \sin I \,.\, \cos\psi \\ \sin\alpha \,.\, \sin\theta = \sin I \,.\, \sin\psi \\ \cos D = \cos^2 2a - \sin^2 2a \,.\, \cos\theta \end{array}\right\}(a)$$

107. — En écrivant pour $1+\cos I$ et pour $\sin I$ leurs valeurs trigonométriques $2\cos^2\frac{I}{2}$ et $2\sin\frac{I}{2}\,.\,\cos\frac{I}{2}$, la première de ces équations donne

$$\cos\psi = \text{cotang}\,\alpha \,.\, \text{cotang}\,\frac{I}{2};$$

ce qui fait connaître immédiatement l'angle ψ, qui est encore donné par l'équation

$$\sin\theta = \frac{\sin I}{\sin\alpha} \,.\, \sin\psi.$$

Enfin, retranchant de l'unité chaque membre de la troisième des équations (a), divisant toute l'équation par 2, et opérant les réductions, nous la transformerons en

$$\sin\frac{D}{2} = \sin 2\alpha \,.\, \cos\frac{\theta}{2}.$$

Ces équations fournissent des moyens directs de calculer successivement ψ, θ et D, en fonction des valeurs connues de a et de I. Les formules se prêtent au calcul logarithmique, et ne sont pas dépourvues d'une certaine élégance.

---

§ IV. — *Réflexion sur des surfaces courbes.*

Recherche générale du chemin parcouru par un rayon réfléchi sur une courbe. — Expressions générales de la distance du foyer au point rayonnant. — Angle formé par l'axe et le rayon réfléchi. — Formules relatives au cas où le point rayonnant n'est pas l'origine des coordonnées. — Formules relatives au cas où les rayons incidents sont parallèles à l'axe. — Foyer. — Distance focale. — Sommet. — Recherche des courbes qui réfléchissent vers un même point tous les rayons incidents. — La courbe est dans tous les cas une section conique. — Ellipse. — Parabole. — Cercle. — Foyer d'une surface plane. — Foyer d'un anneau sphérique. — Foyer des rayons centraux dans un réflecteur sphérique. — Foyer principal. — Foyers conjugués. — Les foyers conjugués se meuvent en sens contraire. — Aberration longitudinale pour une ouverture quelconque. — Aberration longitudinale pour de petites ouvertures ; — son expression. — Aberration latérale. — Aberration latérale pour de petites ouvertures. — Aberration pour de petites ouvertures et des rayons parallèles.

108. — La réflexion sur une surface courbe est la même que celle sur le plan tangent au point d'incidence : le rayon réfléchi sera donc contenu dans le plan déterminé par le rayon incident et par la normale ou perpendiculaire au point d'incidence. L'expression générale du chemin parcouru par le rayon réfléchi sur des surfaces à double courbure étant d'une extrême complication, et probablement d'un faible secours pour ce qui doit suivre, nous nous bornerons au cas particulier d'une surface de révolution (ce qui comprend le cas d'un plan et d'une surface conique quelconques), dans l'hypothèse que le plan d'incidence passe par l'axe de révolution.

Problème.

109. — Un rayon contenu dans un plan passant par l'axe tombe sur une surface de révolution : on demande la direction du rayon réfléchi.

Soit Q P (fig. 11) une section de la surface par le plan d'incidence, QN l'axe, Q P le rayon incident et P r le rayon réfléchi : celui-ci ou son prolongement coupera l'axe en q.

Menons la tangente P T, l'ordonnée P M, et la normale P N prolongée jusqu'en O, et posons

$$x = QM,\ y = MP,\ p = \frac{dy}{dx},\ \theta = \text{angle } MQP,$$

ou l'angle compris entre l'axe et le rayon incident. Alors, puisque l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, nous aurons

$$rPO = OPQ;$$

d'où

$$NPq = OPQ,$$

et par conséquent

$$QPT = TPq.$$

Or

$$\begin{aligned} Qq &= QM - Mq \\ &= QM - PM \cdot \text{tang } MPq \\ &= x - y \text{ tang } (TPM - TPq) \\ &= x - y \text{ tang } (TPM - TPQ) \\ &= x - y \text{ tang } (TPM - PTM + PQM) \\ &= x - y \text{ tang } (90^\circ - 2\,PTM + PQM) \end{aligned}$$

Mais par la théorie des courbes l'on a

$$\text{tang } PTM = \frac{dy}{dx} = p;$$

donc

$$PTM = \text{arc } (\text{tang} = p) = \text{tang}^{-1} p,$$

en désignant par tang^{-1} la fonction inverse de celle qui est exprimée par tang.

Puisque P Q M $= \theta$, cette équation devient

$$Q q = x - y \cdot \text{cotang}\left(2 \cdot \text{tang}^{-1} p - \theta\right)$$

$$= x - y \cdot \text{cotang}\left\{2 \,\text{tang}^{-1} \frac{dy}{dx} - \text{tang}^{-1} \left(\frac{y}{x}\right)\right\} \quad (a)$$

$$\left(\text{à cause de la relation tang}\ \theta = \frac{PM}{QM} = \frac{y}{x}\right).$$

Telle est alors l'expression générale de la distance entre les deux points où les rayons incident et réfléchi coupent l'axe.

Maintenant nous savons, par la trigonométrie, que, A et B étant deux arcs quelconques,

$$\text{cotang}\left(2\,\text{tang}^{-1} A - \text{tang}^{-1} B\right)$$

$$= \text{cotang}\left(\text{tang}^{-1} \frac{2A}{1 - A^2} - \text{tang}^{-1} B\right)$$

$$= \text{cotang. tang}^{-1} \left[\frac{2A - (1 - A^2)B}{(1 - A^2) + 2AB}\right],$$

ou simplement

$$\frac{1 - A^2 + 2AB}{2A - (1 - A^2)B},$$

attendu que, la tangente et la cotangente étant des quantités réciproques,

$$\text{cotang.tang}^{-1}\ \theta = \frac{1}{\theta}.$$

Appliquant cette formule au cas actuel, où

$$A = \frac{dy}{dx} = p, \quad B = \frac{y}{x},$$

la valeur trouvée plus haut pour Q q devient

$$\left.\begin{aligned} Qq &= x - y\,\frac{(1-p^2)x + 2py}{2px - (1-p^2)y} \\ &= 2\,.\,\frac{(x+py)\,(px-y)}{2px - (1-p^2)y} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (b)$$

Ces expressions renferment toute la théorie des foyers et des aberrations des surfaces réfléchissantes.

110. — *Coroll.* 1. Trouver l'angle entre l'axe et le rayon réfléchi, angle que nous désignerons par θ'.

C'est l'angle P q M qui est le complément de M P q. Nous avons trouvé plus haut

$$\mathrm{MP}\,q = 90^\circ - 2\,\mathrm{tang}^{-1}p + \theta;$$

d'où

$$\theta' = 2\,\mathrm{tang}^{-1}p - \theta.$$

Mais $\mathrm{tang}\,\theta = \frac{y}{x}$; de manière qu'en substituant, il vient

$$\mathrm{tang}\,\theta' = \frac{2px - (1-p^2)y}{(1-p^2)x + 2py} \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

111. — *Coroll.* 2.

$$\mathrm{A}\,q = a' = a + 2\,\frac{(x+py)\,(px-y)}{2px - (1-p^2)y} \quad \ldots \quad (d)$$

112. — Dans toutes les formules précédentes, nous avons supposé l'origine des x au point rayonnant Q. Si nous voulions le placer ailleurs, par exemple en A, nous n'aurions qu'à écrire partout $x - a$, au lieu de x. Dans cette hypothèse, les formules deviendraient :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{tang}\,\theta = \dfrac{y}{x-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (e) \\ \text{tang}\,\theta' = \dfrac{2p\,(x-a) - (1-p^2)\,y}{(1-p^2)\,(x-a) + 2\,p\,y} \quad \ldots \quad (f) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{A Q} = a;\ \text{Q}\,q = \dfrac{2\,(x-a+p\,y)\,(p\,x-p\,a-y)}{2\,p\,(x-a) - (1-p^2)\,y} \quad (g) \\ \text{A}\,q = a' = \dfrac{2\,(x+p\,y)(p\,x-y) + [\,(1-p^2)\,y - 2\,p\,x\,]\,a}{2\,p\,x - (1-p^2)\,y - 2\,p\,a} \quad (h) \end{array}\right.$$

113. — Si le rayon incident était parallèle à l'axe, il suffirait de supposer le point Q infiniment éloigné; ou bien, en plaçant, comme dans l'article précédent, l'origine en A à une distance finie, de faire $a =$ A Q $=$ l'infini.

Les dernières équations donnent alors

$$\left.\begin{array}{r} \text{Q}\,q = \infty \\ \text{tang}\,\theta' = \dfrac{2\,p}{1-p^2} \\ \text{A}\,q = x - y \cdot \dfrac{1-p^2}{2\,p} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

Problème.

114. — Représenter par leurs équations les rayons incident et réfléchi.

L'équation d'une ligne droite quelconque est nécessairement de la forme $Y = \alpha X + \beta$.

Prenons le point A pour origine des coordonnées, et conservons la notation précédente, en désignant par x et y les coordonnées du point P de la courbe, et par X et Y celles d'un point quelconque du rayon incident. Q étant l'intersection du rayon et de l'axe, et A Q $= a$, il est évident 1° que, pour $X = a$, $Y = 0$; 2° que, le rayon passant par le point P, $X = x$ donne $Y = y$.

Il résulte de là que

$$o = \alpha a + \beta, y = \alpha x + \beta;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{y}{x-a}, \beta = \frac{-ay}{x-a}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et l'équation du rayon incident devient

$$Y = \frac{y}{x-a}(X-a), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou, ce qui est la même chose,

$$Y - y = \frac{y}{x-a}(X-x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ou encore, puisque $\text{tang}\,\theta = \frac{PM}{MQ} = \frac{y}{x-a}$,

$$Y = (X-a)\,\text{tang}\,\theta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ou

$$Y - y = (X-x)\,\text{tang}\,\theta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

De même, pour le rayon réfléchi, si l'on représente son équation par $Y = \alpha' X + \beta'$, il viendra

$$\alpha' = \frac{y}{x-a'}, \beta' = -\frac{a'y}{x-a'}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

et par conséquent

$$Y = \left(\frac{y}{x-a'}\right)(X-a') = (X-a')\,\text{tang}\,\theta', \quad . \quad (7)$$

$$Y - y = \frac{y}{x-a'}(X-x) = (X-x)\,\text{tang}\,\theta'. \quad . \quad (8)$$

Telles sont les équations qui se rapportent au rayon réfléchi; les valeurs de a' et de $\text{tang}\,\theta'$ sont données en fonction de x, y, a et $p = \frac{dy}{dx}$, par les équations (g) et (h), ou (i).

115. — Si l'on fait tourner toute la figure (fig. 11) autour de l'axe A M, Q étant un point rayonnant, les rayons réfléchis par la surface unique engendrée par la révolution de Q P sont tous concentrés au même point q, qui devient ainsi infiniment plus éclairé que s'il ne l'était que par un seul rayon réfléchi par une molécule quelconque de la surface. Le point P engendre un anneau dont M P est le rayon, q est dit alors le *foyer* de cet anneau, et A q la *distance focale* de ce même anneau.

Cette dernière expression sert ordinairement à désigner la distance de q au *sommet*, c'est-à-dire au point où la courbe rencontre l'axe; mais nous emploierons cette expression dans son acception la plus étendue.

116. — Généralement la position du foyer varie avec celle du point P, excepté dans le cas particulier où, d'après la nature de la courbe, la fonction dont dépend a' est une quantité constante.

Nous allons discuter ce cas important.

Problème.

117. — Trouver la courbe qui a le même foyer pour tous les points de sa surface de révolution, et dont tous les rayons divergents ou convergents partis du point Q seront réfléchis, et iront diverger ou converger vers le point q.

La valeur de Q q, rapportée à l'art. 109 et donnée par l'équation (b), étant constante, fournit l'équation

$$\frac{(x+py)(px-y)}{2px-(1-p^2)y} = \text{constante} = c.$$

Après avoir fait disparaître les fractions, et remplacé $x-c$ par x, ce qui transporte simplement l'origine des coordon-

nées à une distance c de sa situation primitive, l'équation précédente devient

$$p(x^2 - y^2 - c^2) = (1 - p^2)\,xy. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Pour intégrer cette équation, faisons choix d'une nouvelle variable z; telle que $py = x\,z$.

En multipliant par y l'équation donnée, il vient

$$py\,(x^2 - y^2 - c^2) = xy^2 - x\,.\,p^2y^2,$$

ou

$$x\,z\,(x^2 - y^2 - c^2) = xy^2 - x^3z^2\,;$$

d'où l'on tire

$$y^2 = \frac{z\,x^2 - z\,c^2 + z^2x^2}{1+z} = x^2z - c^2\frac{z}{1+z}.$$

Différentiant cette équation :

$$2y\,dy\left(= 2py\,dx = z\,.\,xz\,.\,dx,\ \text{à cause de } p = \frac{dy}{dx}\right)$$

$$= d\left(x^2z - \frac{c^2z}{1+z}\right)$$

$$= 2\,x\,z\,dx + x^2\,dz - c^2\,d\left(\frac{z}{1+z}\right);$$

ce qui donne

$$x^2\,dz - c^2\,d\left(\frac{z}{1+z}\right) = 0,$$

ou

$$\left[x^2 - \frac{c^2}{(1+z)^2}\right]dz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Il est évident que l'on peut satisfaire à cette équation de deux manières : la première en posant le facteur

$$x^2 - \frac{c^2}{(1+z)^2} = 0, \text{ ou } x = \pm\frac{c}{1+z};$$

d'où résulte simplement $x + py = c$, en remettant à la

place de z sa valeur $\frac{py}{x}$. Eliminant p entre cette équation et l'équation primitive (a), on trouve, après réduction,

$$y^2 + (x - c)^2 = 0.$$

Ce résultat n'est cependant qu'une *solution singulière* de l'équation différentielle; ce qui provient de la marche que nous avons suivie pour l'obtenir : comme la valeur de y que l'on en déduit est toujours imaginaire, elle ne peut remplir les conditions du problème.

La seconde manière de satisfaire à l'équation (b) est de poser $dz = 0$, ou $z =$ constante.

Représentons cette constante par $-h$: alors, puisque

$$z = \frac{py}{x},$$

nous aurons

$$\frac{py}{x} = \frac{y\,dy}{x\,dx} = -h.$$

Cette équation, étant intégrée, donne

$$y^2 = h(a^2 - x^2),$$

a étant une autre constante : c'est l'équation générale des sections coniques; et il est clair, d'après les propriétés de ces courbes, qu'elles satisfont aux conditions exigées. En effet, deux lignes tirées de leurs foyers à un point quelconque de la courbe forment toujours des angles égaux avec la tangente en ce point, et par conséquent un rayon convergent ou divergent provenu de l'un des foyers, et réfléchi par la courbe, se dirige nécessairement vers l'autre foyer; mais l'analyse précédente, étant directe, fait voir que les sections coniques possèdent cette propriété à l'exclusion de toutes les autres courbes.

118. — Ainsi, dans le cas de l'ellipse, tous les rayons (fig. 12) S P, SP′, etc., divergents du foyer S, convergeront

après leur réflexion vers l'autre foyer H, la surface intérieure de l'ellipse étant polie : au contraire, tous les rayons Q P, Q P', qui convergeaient du point S, iront, après leur réflexion, en divergeant vers le point H.

119. — Dans l'hyperbole (fig. 13), les rayons Q P, Q' P, etc., convergents vers le foyer S, et tombant sur la partie convexe et polie de la courbe, iront, après leur réflexion, converger vers l'autre foyer H; s'ils divergeaient du point S, et qu'ils fussent réfléchis sur la surface polie et concave P P', ils divergeraient également du point H.

120. — Dans le cas de la parabole, les rayons parallèles à l'axe, et tombant sur la surface intérieure ou concave de la courbe, seront tous réfléchis vers le foyer S (fig. 14); s'ils étaient réfléchis par la surface extérieure ou convexe, ils divergeraient tous de ce même foyer.

121. — Les rayons convergents ou divergents, par rapport au centre d'une sphère, divergeront ou convergeront vers ce même centre, après leur réflexion.

Essayons d'appliquer notre formule générale (*b*) [art. 109] à quelques cas particuliers.

Problème.

122. — Supposons que la surface réfléchissante soit un plan, où que la courbe P C dégénère en ligne droite, et cherchons le foyer des rayons réfléchis.

Nous avons par hypothèse

$$x = \text{constante} = ap = \frac{dy}{dx} = \infty,$$

et la formule générale devient simplement

$$Qq = a' = \frac{2xy}{y} = 2x = 2a.$$

Ainsi le foyer des rayons réfléchis est un point de l'autre côté du plan réflecteur, et qui s'en trouve à une distance égale à celle du point lumineux à ce même plan.

Comme ce résultat est indépendant de la valeur de y ou de la position du point P, nous voyons que tous les rayons réfléchis divergeront de ce point (fig. 15).

Problème.

125. — Assigner le foyer d'un anneau d'un réflecteur sphérique.

Soit z le rayon de la sphère : si l'on prend pour origine des coordonnées le point lumineux même, l'équation du cercle générateur sera

$$r^2 = (x - a)^2 + y^2,$$

qui donne par la différentiation

$$(x - a)\, dx + y\, dy = 0\,;$$

et par conséquent

$$p = \frac{dy}{dx} = -\frac{x - a}{y}, \quad 1 - p^2 = \frac{2y^2 - r^2}{y^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation générale (b), l'on trouve pour distance focale

$$Qq = \frac{2a\,[r^2 + a(x - a)]}{r^2 + 2a(x - a)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Telle est dans tous les cas l'expression de la distance du foyer des rayons réfléchis au point rayonnant.

En optique, cependant, il est plus avantageux de connaître la distance au centre ou à la surface.

La distance au centre E q (fig. 16) est

$$= Qq - QE = \frac{2a\,(ax - a^2 + r^2)}{2ax + r^2 - 2a^2} - a$$

$$Eq = \frac{ar^2}{2a\,(x - a) + r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Les valeurs positives de E q se trouvent à la droite du point E, c'est-à-dire qu'elles sont de même signe que les valeurs de x ou de Q q.

Coroll. 1. Pour déterminer le foyer d'un anneau sphérique infiniment étroit, contigu au *sommet* C ou C′ de la surface sphérique réfléchissante, ou, comme on l'appelle en optique, le *foyer des rayons centraux,* nous devons poser pour le point C (lorsque la réflexion se fait sur la partie concave),

$$x = a + r,$$

et pour le point C′, quand les rayons sont réfléchis par la partie convexe,

$$x = a - r.$$

La première hypothèse donne

$$\text{E}\,q = \frac{r\,a}{2\,a + r},\ \text{C}\,q = \frac{r(a + r)}{2\,a + r}. \quad \ldots \quad (c)$$

La seconde donne le même résultat, en changeant simplement r en $-r$.

124. — Soient F et F′ les milieux des rayons C E et C E′, et q et q' les foyers des rayons réfléchis en C et en C′, nous aurons

$$\text{F}\,q = \frac{1}{2}\,r - \frac{r\,a}{2\,a + r} = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{a + \frac{r}{2}}; \quad \ldots \quad (d)$$

d'où l'on tire

$$\text{QF} : \text{FE} :: \text{EF} : \text{F}q; \quad \ldots \quad (e)$$

analogie d'une grande utilité.

Nous avons pareillement

$$\text{QF}' : \text{F}'\text{E} :: \text{EF}' : \text{F}'q;$$

de manière que la même analogie peut s'appliquer aux deux cas, et peut être considérée comme servant de fondement à la théorie des foyers des rayons centraux. Il est évident, eu



effet, que, si P C était toute autre courbe qu'un cercle, la même propriété subsisterait encore en prenant pour E le centre de courbure au sommet.

125. — *Coroll.* 2. Si a était infini, ou si les rayons incidents devenaient parallèles, nous aurions $Fq = o$; ce qui nous apprend que, dans ce cas, le *foyer des rayons parallèles centraux* partage le rayon en deux parties égales. On distingue ce foyer en l'appelant *foyer principal* du réflecteur.

126. — *Définition.* Q et q sont dits *foyers conjugués*. Il est évident que, si q devenait le point rayonnant, Q serait son foyer; car les rayons suivraient le même chemin, quoiqu'en sens inverse.

127. — *Coroll.* 3. En n'ayant égard qu'aux rayons centraux, les foyers conjugués s'écartent ou se rapprochent par mouvement contraire; ils coïncident au centre de la surface du réflecteur. En effet, tandis que a varie depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, Fq subit les variations suivantes :

Tant que a variera depuis ∞ jusqu'à $-\frac{r}{2}$, Fq sera positif, et croîtra depuis o jusqu'à ∞; c'est-à-dire que, Q s'avançant vers l'infini, FEq passe par C'. Si le mouvement du point Q continue, Fq devient négatif, parce que alors a est négatif et plus grand que $\frac{r}{2}$, et Fq diminue à mesure que a devient plus grand : ainsi q se rapproche du point E par un mouvement contraire à celui de Q; et quand Q est à une distance infinie, q est de nouveau en E.

Quand Q arrive en E, $a = o$, $Fq = \frac{r}{2}$, ou q est aussi en E.

Quand Q arrive en C, $a = -r$, $Fq = -\frac{r}{2}$, ou q est aussi en C.

128. — Il résulte de la valeur de E q, équation (b), qu'un réflecteur sphérique A C B (fig. 17), dont la corde (ou l'*ouverture*, comme on dit en optique) est A B, fait converger ou diverger le rayon réfléchi par l'anneau extérieur A, vers un point q, autre que le foyer des rayons centraux.

Soit f ce dernier foyer, nous aurons

$$Ef = \frac{ar}{2a+r}, \quad Cf = \frac{(a+r)r}{2a+r},$$

$$fq = \frac{ar^2}{2a(x-a)+r^2} - \frac{ar}{2a+r}.$$

129. — Cette quantité fq s'appelle l'*aberration longitudinale* du réflecteur sphérique. Si les rayons tombent sur la partie convexe, il suffira de remplacer $+r$ par $-r$.

Problème.

Exprimer approximativement l'aberration longitudinale d'un réflecteur sphérique dont l'ouverture est très petite par rapport à la distance focale.

y dénotant la demi-ouverture, et $x - a$ étant égal à

$$\sqrt{r^2 - y^2} = r - \frac{y^2}{2r}$$

(en négligeant y^4 et les puissances supérieures de y), il vient

$$fq = \text{l'aberration} = \frac{ar^2}{2ar + r^2 - \frac{ay^2}{r}} - \frac{ar}{2a+r}$$

$$= \frac{a^2y^2}{r(2a+r)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

130. — En posant C$f = f$, nous avons

$$f = \frac{r(a+r)}{2a+r},$$

et par conséquent nous pouvons éliminer la distance a du point rayonnant, et exprimer l'aberration en fonction de l'ouverture du rayon de courbure et de la distance du foyer des rayons centraux au sommet C : en effet, l'on tire de la dernière équation

$$a = \frac{r\,(r-f)}{2f-r};$$

et, cette valeur étant reportée dans l'équation (f), on trouve

$$\text{l'aberration} = \frac{(r-f)^2\,y^2}{r^3} = \frac{\overline{Ef}^2 \,.\, (\text{demi-ouverture})^2}{(\text{rayon})^3}. \quad (g)$$

131. — Pour exprimer l'aberration latérale ou la quantité dont le rayon réfléchi A q g s'écarte de l'axe au foyer des rayons centraux, ou la valeur de fg (fig. 17), nous avons

$$fg = fq \,.\, \frac{\mathrm{A\,M}}{\mathrm{M}\,q};$$

mais $\mathrm{A\,M} = y$, et

$$\mathrm{M}q = \mathrm{E\,M} - \mathrm{E}q = x - a - \frac{a\,r^2}{2a(x-a)+r^2}$$

$$= \frac{2a(x-a)^2 + r^2\,(x-2a)}{2a\,(x-a)+r^2}:$$

ainsi

$$fg = \frac{2a^2\,r}{2a+r}\,y \times \frac{a-x+r}{r^2\,(x+2a)+2a\,(x-a)^2}. \quad (h)$$

132. — Quand l'ouverture est très petite, cette valeur se réduit à

$$fg = \frac{a^2\,y^3}{r^2\,(r+a)\,(r+2a)}. \quad \ldots\ldots \quad (i)$$

133. — Quand a est infini, ou que les rayons incidents sont parallèles,

$$\left.\begin{aligned} fq &= \text{l'aberration longitudinale} = \frac{y^2}{4r} \\ fg &= \text{l'aberration latérale} = \frac{y^3}{2r^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (j)$$

Si les rayons tombent sur la partie convexe de la sphère, il faut supposer r négatif, ce qui ne fait que changer les signes des aberrations.

---

§ V. — *Des caustiques par réflexion, ou catacaustiques.*

Définition des caustiques par réflexion. — Recherche des coordonnées de la caustique, dans l'hypothèse d'une divergence quelconque. — Caustiques produites par des rayons divergents d'un même point. — Caustique de rayons parallèles. — Distance entre les points correspondants sur la courbe et sur la caustique. — Relation générale entre les points conjugués ou les foyers de rayons réfléchis par une courbe quelconque. — Recherche de la longueur de la caustique. — Les caustiques sont toujours rectifiables. — Recherche de la relation générale entre deux caustiques conjuguées et la courbe réfléchissante intermédiaire. — Caustique de la cycloïde; — est également une cycloïde. — Caustique d'un cercle. — Cercle de moindre aberration pour un réflecteur sphérique. — Cas où l'ouverture est peu considérable. — Cas où l'ouverture est très petite par rapport au rayon. — Recherche de la densité des rayons pour un point quelconque. — Premier cas. — Deuxième cas. — Troisième cas. — Quatrième cas. — Applications à des cas particuliers. — Premier cas. — Deuxième cas. — Troisième cas. — Quatrième cas. — Cinquième cas. — Eclairement d'un écran qui reçoit les rayons réfléchis.

134. — Si des rayons de lumière tombent sur un milieu ayant toute autre forme qu'une section conique dont le point rayonnant occupe le foyer, la réflexion ne les fera plus converger vers un même point; mais ils seront dispersés suivant une loi qui dépendra de la nature de la courbe réfléchissante.

L'inclinaison sur l'axe variera pour chaque rayon avec le

point qui l'aura réfléchi, et elle ne sera pas la même pour deux rayons consécutifs. Chaque rayon coupera celui qui le suit immédiatement en un certain point, et le *lieu* de ces points d'intersection continuelle sera une courbe à laquelle tous les rayons réfléchis seront nécessairement tangents, et qui porte le nom de *caustique*.

Si ces rayons tombent sur une autre courbe réfléchissante, ils seront dispersés de nouveau, et produiront une autre caustique en se coupant deux à deux, et ainsi de suite à l'infini.

135. — Soient Q P, Q′ P′ (fig. 18), deux rayons contigus tombant sur les points consécutifs P, P′, de la courbe réfléchissante P P′, et P R, P′ R′, leurs directions après qu'ils auront été réfléchis : comme ils ne sont pas nécessairement parallèles, leur point d'intersection Y correspondra sur la caustique Y Y′ Y″ au point P de la courbe réfléchissante ; et si nous déterminons ainsi les points Y′ Y″, etc., par les points consécutifs P′ P″, etc., leur lieu ou la courbe Y Y′ Y″ sera la caustique totale.

136. — Puisque le rayon réfléchi passe par P, dont les coordonnées sont x, y, son équation, ainsi que nous l'avons déjà vu (art. 114), est nécessairement de la forme

$$Y - y = P\,(X - x).$$

Si nous regardons x, y, P, comme variables, cette équation sera celle d'un rayon quelconque, et celle du rayon consécutif sera

$$Y - (y + dy) = (P + dP)\,[X - (x + dx)].$$

Maintenant, puisque le point Y où les rayons se coupent leur est commun à tous deux, les coordonnées X et Y seront les mêmes en ce point pour les deux rayons, et par conséquent les dernières équations auront lieu en même temps pour cette intersection, et détermineront les valeurs de X et de Y, ou

la situation du point Y. Or la dernière de ces équations n'est autre que la première, en supposant X et Y constants, et en ajoutant à chaque variable sa différentielle. Nous avons donc à tirer les valeurs de X et de Y des deux équations

$$\mathrm{Y}-y=\mathrm{P}(\mathrm{X}-x),$$

$$-dy=(\mathrm{X}-x)\,d\mathrm{P}-\mathrm{P}\,dx,$$

qui donnent sur-le-champ

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{X}&=x+\frac{\mathrm{P}-p}{d\mathrm{P}}\,dx\\ \mathrm{Y}&=y+\mathrm{P}\,.\,\frac{\mathrm{P}-p}{d\mathrm{P}}\,dx\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(k)$$

En substituant à P sa valeur

$$=\text{tang}\ \theta' \text{ ou } \frac{2p(x-a)-(1-p^2)y}{(1-p^2)(x-a)+2py},$$

et en effectuant toutes les différentiations indiquées ou implicites pour éliminer x et y à l'aide des équations de la courbe et des conditions auxquelles la quantité a peut être soumise, on tombera nécessairement sur une équation entre X et Y, qui sera celle de la caustique.

Problème.

137. — Assigner la caustique quand les rayons divergent d'un point fixe pris sur l'axe d'une courbe réfléchissante donnée.

Dans ce cas, a est invariable, et P doit être différentié dans cette hypothèse.

On peut donc, pour plus de simplicité, poser

$$a=0,$$

ou supposer l'origine des coordonnées au point rayonnant; alors,

$$\left.\begin{array}{l}
P = \dfrac{2px - (1-p^2)y}{2py + (1-p^2)x} \\
\dfrac{dP}{dx} = (1+p^2) \cdot \dfrac{(1+p^2)(y-px) + 2q(x^2+y^2)}{[2py + (1-p^2)x]^2} \\
\text{équations dans lesquelles } q = \dfrac{dp}{dx} \\
P - p = \dfrac{(1+p^2)(px-y)}{2py + (1-p^2)x}
\end{array}\right\} (l)$$

En portant ces valeurs dans les équations (k), celles-ci donnent

$$\left.\begin{array}{l}
X = 2 \cdot \dfrac{p(px-y)^2 - qx(x^2+y^2)}{(1+p^2)(px-y) - 2q(x^2+y^2)} \\
Y = 2 \cdot \dfrac{(px-y)^2 + qy(x^2+y^2)}{-(1+p^2)(px-y) + 2q(x^2+y^2)}
\end{array}\right\} (m)$$

138. — *Coroll.* 1. Si les rayons incidents sont parallèles, c'est-à-dire si le point lumineux est à une distance infinie, nous pouvons fixer arbitrairement l'origine des coordonnées; et puisque, dans ce cas, l'équation du rayon réfléchi est, d'après les équations (i) et (k), art. 113 et 114,

$$Y - y = (X - x) \cdot \frac{2p}{1-p^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (m, 2)$$

nous avons

$$P = \frac{2p}{1-p^2}, \; P - p = \frac{p(1+p^2)}{1-p^2};$$

$$\frac{dx}{dP} = \frac{(1-p^2)^2}{2q(1+p^2)},$$

en écrivant q à la place de $\frac{dp}{dx}$ ou de $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Après ces substitutions, nous obtenons les valeurs suivantes pour les coordonnées de la caustique :

$$X = x + \frac{p}{2q}(1 - p^2),\ Y = y + \frac{p^2}{q}. \quad . \quad . \quad (n)$$

139. — *Coroll.* 2. Dans le cas général, en posant $f =$ la ligne Py ou la distance entre un point de la courbe et le point correspondant sur la caustique, l'on a

$$f = \sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2},$$

qui devient, en y remplaçant $X - x$ et $Y - y$ par leurs valeurs trouvées plus haut,

$$f = \sqrt{1 + P^2} \cdot \frac{P - p}{dp} dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

ou, en écrivant au lieu de P sa valeur, et en effectuant les opérations,

$$f = \frac{-(y - px)(1 + p^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{(y - px)(1 + p^2) + 2q(x^2 + y^2)}. \quad . \quad . \quad (p)$$

140. — *Coroll.* 3. Dans le cas de rayons parallèles, quand

$$P = \frac{2p}{1 - p^2},\quad \frac{dP}{dx} = \frac{2q(1 + p^2)}{(1 - p^2)^2},$$

$$P - p = \frac{p(1 + p^2)}{1 - p^4},\quad \sqrt{1 + P^2} = \frac{1 + p^2}{1 - p^2},$$

l'on a

$$f = \frac{p(1 + p^2)}{2q}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

141. — *Coroll.* 4. Nommons c une corde du cercle osculateur passant par l'origine des coordonnées ou par le point rayonnant : alors, d'après la théorie des courbes,

$$c = \frac{2(px - y)(1 + p^2)}{q\sqrt{x^2 + y^2}};$$

d'où

$$q(x^2+y^2)=\frac{2(px-y)(1+p^2)\sqrt{x^2+y^2}}{c}.$$

Substituant cette valeur de $q(x^2+y^2)$ dans l'expression générale de f, pour éliminer q, l'on trouve

$$f=\frac{c\sqrt{x^2+y^2}}{4\sqrt{x^2+y^2}-c}=\frac{rc}{4r-c},$$

en posant, pour abréger,

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

On tire de là

$$f-\tfrac{1}{4}c=\frac{(\frac{1}{4}c)^2}{r-\frac{1}{4}c};$$

d'où l'on conclut

$$r-\tfrac{1}{4}c:\tfrac{1}{4}c::\tfrac{1}{4}c:f-\tfrac{1}{4}c. \quad \ldots\ldots \quad (r)$$

Ce qui fournit la propriété suivante (*Optique de Smith*, édit. de 1738, p. 160) :

142. — Q et q sont les foyers conjugués d'un faisceau élémentaire de rayons réfléchis au point P (fig. 19), par la surface d'une courbe quelconque.

Soit V P W le cercle osculateur : si la courbe était un cercle, ce serait la courbe même. Divisons les cordes PV, P W (directions des rayons incident et réfléchi), en F et en f, de telle manière que PF et Pf en soient respectivement le quart, et la relation entre Q et q sera exprimée par la proportion

$$\text{QF} : \text{FP} :: \text{P}f : fq. \quad \ldots\ldots \quad (s)$$

143. — *Coroll.* 5. Posant

$$\frac{\text{P}-p}{d\,\text{P}^2}\cdot dx=\text{M},$$

l'on a

$$\frac{dX}{dx} = 1 + \frac{dM}{dx},$$

$$\frac{dY}{dx} = p + P \cdot \frac{dM}{dx} + M \cdot \frac{dP}{dx} = P\left(1 + \frac{dM}{dx}\right);$$

d'où il suit que

$$P = \frac{dY}{dX}:$$

P est donc pour la caustique, par rapport aux coordonnées X et Y, ce qu'est p pour la courbe réfléchissante, par rapport au point dont les coordonnées sont x et y.

144. — *Coroll.* 6. Dénotons par S la longueur de la caustique rectifiée = arc A H K Y.

L'on sait que

$$dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = dX \cdot \sqrt{1 + P^2}$$
$$= (dx + dM)\sqrt{1 + P^2};$$

et à cause de

$$df = dM \cdot \sqrt{1 + P^2} + M \cdot \frac{P\,dP}{\sqrt{1 + P^2}},$$

$$dS = dx \cdot \sqrt{1 + P^2} + df - M \cdot \frac{P\,dP}{\sqrt{1 + P^2}};$$

mais

$$M \cdot dP = (P - p)\,dx:$$

ainsi

$$dS = df + dx\left[\sqrt{1 + P^2} - \frac{(P - p)P}{\sqrt{1 + P^2}}\right]$$
$$= df + dx \cdot \frac{1 + Pp}{\sqrt{1 + P^2}}.$$

Ce qui devient, en mettant pour P sa valeur,

$$\frac{2px-(1-p^2)y}{2py+(1-p^2)x},$$

$$dS = df + dx \cdot \frac{x+py}{\sqrt{x^2+y^2}} = df + d\sqrt{x^2+y^2};$$

intégrant des deux parts :

$$S = \text{constante} + f + \sqrt{x^2+y^2}.$$

Il suit de là que la caustique est toujours une courbe rectifiable, et que sa longueur

$$= A K y = Q P + P y + \text{constante};$$

mais

$$\text{arc } A K F = Q C + C F + \text{constante}.$$

il vient donc, par soustraction,

$$\text{arc } F y = (Q C + C F) - (Q P + P Y).$$

Ce qui fait voir que la caustique est nécessairement une courbe rectifiable, pourvu que la courbe réfléchissante ne soit pas elle-même transcendante.

145. — Si les rayons P R, P′ R′, P″ R″, etc., après leur réflexion sur la courbe P P′ P″, tombent sur un autre réflecteur R R′ R″, et sont réfléchis dans les directions R S, R′ S′, R″ S″, etc. (fig. 20), leurs intersections successives produiront une nouvelle caustique Z Z′ Z″, que l'on déterminera par une analyse semblable, et ainsi à l'infini.

Réciproquement, quelle que soit la loi que suivent les rayons Q P, Q′ P′, etc., chacun d'eux peut être considéré comme la caustique d'une autre courbe réfléchissante, et ainsi de suite.

Soit V V′ V″ cette courbe : puisque P V Q lui est tangente, si les courbes V V′ V″ et P P′ P″ étaient connues, le point Q sur l'axe (d'où l'on peut supposer émis le rayon Q P) serait

déterminé en fonction des coordonnées de P, et la quantité a disparaîtrait entièrement. Le problème suivant nous offre un exemple des calculs à effectuer dans cette circonstance.

Problème.

146. — Déterminer les relations entre deux caustiques consécutives ou *conjuguées* (si l'on peut les appeler ainsi), V V′ V″, Y Y′ Y″, et la courbe réfléchissante intermédiaire P P′ P″.

Soient toujours V et Y deux points conjugués sur les caustiques, P le point réfléchissant, et nommons

ξ et η	les coordonnées	de V,
x et y	celles	de P,
X et Y	celles	de Y,

Puisque la ligne P V Q est tangente à la première courbe en V, nous avons évidemment

$$y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi);$$

et cette équation, combinée avec celle entre η et ξ, qui représente la courbe V V′ V″, suffira pour déterminer η et ξ en fonction de x et de y, ou réciproquement x et y en fonction de ξ et de η.

Or nous avons aussi, d'après l'art. 114, équation (2),

$$y - \eta = \frac{y}{x - a}(x - \xi),$$

et par conséquent

$$x - a = y \cdot \frac{x - \xi}{y - \eta}, \quad a = \frac{\xi y - \eta x}{y - \eta}.$$

Ainsi a est également exprimé en fonction de x et de y, ou de ξ et de η. Il ne s'agit plus que de substituer sa valeur dans celle de P.

$$P = \frac{2p(x-a)-(1-p^2)y}{(1-p^2)(x-a)+2py},$$

qui devient ainsi

$$P = \frac{2p(x-\xi)-(1-p^2)(y-\eta)}{(1-p^2)(x-\xi)+2p(y-\eta)}; \quad . \quad (t)$$

et cette valeur, étant indépendante de a, peut être substituée dans les équations (k), art. 136, quand X et Y seront déjà exprimées en fonction de x, y, ξ et η, c'est-à-dire des coordonnées de la courbe réfléchissante et de la caustique précédente.

Nous allons essayer d'éclaircir par un exemple ou deux la théorie que nous venons d'exposer.

147.— On demande quelle est la caustique quand la courbe réfléchissante est une cycloïde, et que les rayons incidents sont parallèles entre eux et à l'axe de la cycloïde.

L'équation de la courbe donnée est

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}.$$

Prenant pour unité le rayon du cercle générateur, on déduit de là

$$\frac{1}{q} = (2-x)\sqrt{2x-x^2},$$

et par conséquent

$$\frac{p}{q} = 2x - x^2.$$

Nous aurons donc, en vertu des équations (k), art. 136,

$$X = x + \frac{1-p^2}{2} \cdot \frac{p}{q} = 2x - x^2,$$

$$Y = y + p \cdot \frac{p}{q} = y + x\sqrt{2x-x^2};$$

d'où

$$\frac{dY}{dx}=p+\sqrt{\frac{x}{2-x}}(3-2x)=2\sqrt{2x-x^2}=2\sqrt{X}.$$

De plus

$$\frac{dX}{dx}=2(1-x);$$

mais puisque

$$1-x=\sqrt{1-X},$$

l'on a

$$X=2x-x^2,$$

par conséquent

$$\frac{dX}{dx}=2\sqrt{1-X},$$

et finalement

$$\frac{dY}{dx}=\sqrt{\frac{X}{1-X}}.$$

Ce qui démontre que la caustique est elle-même une cycloïde, de moitié plus petite en dimensions linéaires que la courbe réfléchissante.

148. — Supposons maintenant que la courbe réfléchissante soit un cercle, et que le point lumineux se trouve infiniment éloigné.

L'on a, dans ce cas, en supposant l'origine des coordonnées placée au centre,

$$x^2+y^2=r^2,\quad p=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad q=-\frac{r^2}{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et les équations (k), de l'art. 136, deviennent

$$X=x+\frac{p(1-p^2)}{2q}=\frac{3r^2-2x^2}{2r^2}.x,$$

$$Y=y+\frac{p^2}{q}=\frac{(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2}=\frac{y^3}{r^2}.$$

Ainsi, en posant, pour simplifier, $r = 1$ (ce qui ne peut altérer le résultat),

$$4X^2 = 9x^2 - 12x^4 + 4x^6,$$

$$4Y^2 = 4 - 12x^2 + 12x^4 - 4x^6,$$

faisant la somme

$$4(X^2 + Y^2) = 4 - 3x^2, \quad x^2 = \tfrac{4}{3}(1 - X^2 - Y^2).$$

De manière qu'en substituant pour x^2 cette valeur dans celle de Y, l'on trouve, après réduction,

$$(4X^2 + 4Y^2 - 1)^3 = 27Y^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (v)$$

ce qui est l'équation de la caustique.

Cette équation appartient à une épicycloïde engendrée par la révolution d'un cercle dont le rayon est le quart de celui du cercle réflecteur. La figure 21 représente la caustique dans ce cas, Q P étant le rayon incident et P Y le rayon réfléchi. Elle a un point de rebroussement en F, qui est le foyer principal des rayons réfléchis par la surface concave B C D, et un autre en F′, qui est le foyer des rayons réfléchis par la surface convexe B A D.

Dans ce dernier cas, ce ne sont point les rayons mêmes qui touchent la caustique, mais leurs prolongements derrière la surface.

149. — *Coroll.* Quand Y est très petit ou très voisin du point F, la forme de la caustique approche indéfiniment de celle de la parabole semi-cubique; car l'on a généralement

$$X = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 3Y^{\frac{2}{3}} - 4Y^2};$$

et quand la petitesse de Y permet de négliger Y^2 vis-à-vis de $Y^{\frac{2}{3}}$,

$$X = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}Y^{\frac{2}{3}}, \quad \text{ou } Y^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(X - \frac{1}{2}\right)^3. \quad . \quad (w)$$

150. — Nous avons vu que ce n'est que dans quelques cas très particuliers que les rayons provenant d'un certain point et réfléchis par une courbe se dirigent tous, en divergeant ou en convergeant, vers un même point. En général, ils se distribuent de la manière décrite aux art. 145 et 146, et sont tous tangents à la caustique. La densité des rayons pour un point quelconque de cette courbe est infiniment plus grande que pour l'espace qui l'environne; et pour l'espace entre la caustique et la courbe réfléchissante P C F Y (fig. 21), cette densité est plus grande que pour l'espace extérieur à la caustique Q Y F.

Cette dernière proposition est évidente, car l'espace Q Y F n'est éclairé que par les rayons incidents, tandis que l'autre espace l'est par tous les rayons, tant réfléchis qu'incidents.

151. — Cette assertion peut se démontrer d'une manière très satisfaisante par l'expérience suivante, imaginée par le docteur Brewster.

On prend une lame d'acier poli, de forme concave (fig. 22), que l'on place perpendiculairement sur une feuille de papier blanc. Si l'on expose alors cet appareil aux rayons du soleil, en tenant le plan du papier de telle façon qu'il passe près du soleil sans cependant le toucher, la caustique viendra se peindre sur le papier, et sera marquée par un trait de lumière bien tranché. La partie intérieure sera plus brillante que la partie extérieure, et la lumière s'affaiblira graduellement et d'une manière très rapide à partir de la caustique. Si l'on fait varier la forme de la lame, toutes les différentes espèces de catacaustiques avec leurs points singuliers, de rebroussement, d'inflexion, etc., se développeront admirablement. Cette expérience est à la fois amusante et instructive.

La ligne brillante que l'on aperçoit dans un verre plein de lait, ou mieux encore d'encre, que l'on expose au soleil, nous offre précisément un exemple de la caustique du cercle, dont nous nous sommes occupés plus haut.

152. — Si l'on fait tourner la figure 18 autour de son axe, la courbe réfléchissante engendrera une surface de révolution, qui deviendra un miroir quand on la supposera polie à l'intérieur ou à l'extérieur, suivant que le cas l'exigera : ainsi la caustique engendrera une surface conoïdale, à laquelle tous les rayons réfléchis par le miroir devront être tangents. Aucun miroir qui n'est pas formé par la révolution d'une section conique ayant le point rayonnant à son foyer ne peut donc réunir tous les rayons réfléchis en un même point ou *foyer*. Cependant il y aura toujours un point qui recevra les rayons réfléchis dans un état plus dense que tout autre : c'est le point F, comme nous le verrons bientôt. La déviation de chaque rayon réfléchi, par rapport à ce point, se nomme son *aberration*.

153. — La concentration et la dispersion des rayons par des surfaces réfléchissantes ou réfractantes étant d'une extrême importance dans l'*optique pratique*, il sera nécessaire de traiter ce sujet avec plus de développement. Nous commencerons par chercher jusqu'à quel point les rayons peuvent être concentrés par un réflecteur donné qui les reçoit. A cet effet, nous nous proposerons le problème suivant :

Problème.

154. — Trouver pour un réflecteur de figure et d'*ouverture* A B données le *cercle de moindre aberration*, c'est-à-dire l'endroit où il faut placer un écran pour y recevoir tous les rayons réfléchis par une surface, dans le plus petit cercle possible, et assigner le diamètre de ce cercle.

Soient A C B (fig. 23) le miroir, Q le point rayonnant, G K $f k g$ la caustique, f le foyer des rayons centraux, q le foyer des rayons extrêmes A q, B q, et prolongeons ces lignes jusqu'à ce qu'elles coupent la caustique en Y y. Puisque tous les rayons réfléchis par la partie A C B du réflecteur sont tan-

gents aux points de la caustique entre Kf et kf, il est évident qu'ils doivent tous passer par la ligne Yy. Conservant la notation des problèmes précédents (c'est-à-dire $Qx = X$, $Xy = Y$), posons

$$QL = X_0,\ LK = Y_0,\ QD = x_0,\ DA = y_0,$$

et représentons par P_0, p_0, les valeurs de P et de p correspondantes aux points K et A de la caustique et de la courbe réfléchissante : l'équation de la ligne $AKqy$ sera alors

$$Y - y_0 = P_0(X - x_0), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (x)$$

Y et X étant les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne. Mais au point y, où elle coupe l'autre branche de la caustique, ces coordonnées sont communes à la droite et à cette courbe. Pour ce point donc, l'équation précédente et celles qui expriment la nature de la caustique doivent avoir lieu simultanément; mais ces dernières sont les équations (k), art. 136, combinées avec l'équation de la courbe réfléchissante. Eliminant alors x et y à l'aide de deux de ces équations, et déterminant les valeurs de X et de Y au moyen de celles qui restent, le problème se trouve résolu.

155. — Maintenant la même équation qui donne la valeur de y ou Xy doit donner aussi celle de LK, parce que le point K est commun à la caustique et à la ligne AKy aussi-bien que y.

Mais d'ailleurs, puisque AKy est une tangente, le point K est double, et par conséquent l'équation finale en Y doit avoir nécessairement deux racines égales, outre la valeur de Y que l'on cherche; et celles-là étant connues, le degré de l'équation s'abaissera, et Y s'obtiendra plus facilement.

La marche que nous venons de suivre semble différer de celle que l'on emploie ordinairement, et qui consiste à regarder comme un maximum la valeur de Y, déterminée par l'intersection du rayon réfléchi extrême AKy, et d'un autre rayon quelconque réfléchi au point P. Mais cette différence n'est qu'apparente, car, dans la dernière méthode, nous

devons supposer Y maximum, ou $d\,Y = 0$, en regardant cette quantité comme déterminée par les deux équations coexistantes

$$Y - y_0 = P_0 (X - x_0) \text{ et } Y - y = P(X - x).$$

Or, dans ce cas, la première de ces équations donne aussi

$$d\,X = 0;$$

et par conséquent, en différentiant la seconde, il vient

$$-\,dy = (X - x)\,dP - P\,dx,$$

d'où

$$X - x = \frac{P - p}{dP} \cdot dx;$$

et par conséquent

$$Y - y = P \cdot \frac{P - p}{dP}\,dx.$$

Ces équations ne sont autres que celles de l'art. 156, qui expriment les propriétés générales de la caustique : de manière que cette considération de maximum ne sert qu'à rendre le chemin plus long pour parvenir aux mêmes équations, et ce n'est au fond qu'une méthode différente de déterminer la caustique.

156. — Appliquons ces raisonnemen's au cas d'un réflecteur sphérique. En reprenant les équations et la notation de l'art. 148, et désignant par a la valeur extrême de y, ou la *demi-ouverture* du miroir, et par b la valeur correspondante de x, celle de P sera

$$\frac{2p}{1 - p^2} = \frac{2ab}{b^2 - a^2} = \frac{2ab}{1 - 2a^2}.$$

Par là l'équation (m, 2), art. 138, du rayon réfléchi extrême devient

$$Y - a = \frac{2ab}{1 - 2a^2}(X - b);$$

d'où l'on tire

$$2X = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1 - 2a^2}{a} . Y\right).$$

Prenant pour z une valeur telle que $Y = a^3 z^3$, z étant une autre inconnue, il vient

$$4X^2 = \frac{1}{1 - a^2}\left[1 + (1 - 2a^2)\, a^2 z^3\right]^2.$$

Ecrivant cette dernière valeur au lieu de $4X^2$, et $a^6 z^6$ au lieu de Y^2, dans l'équation (v) de la caustique, art. 148, après avoir extrait la racine cubique et opéré les réductions, nous trouvons, pour déterminer z,

$$a^2 z^6 + (2 - 4a^2)\, z^3 + (3a^2 - 3)\, z^2 + 1 = 0.$$

Mais, d'après la remarque que nous avons faite à l'art. 155, cette équation doit avoir deux racines égales, savoir, quand $x = b$ ou $Y = a^3$, c'est-à-dire quand $z = 1$: ainsi elle doit être divisible par $(z - 1)^2$. Effectuant cette division, on reconnaîtra qu'elle se fait exactement, et l'on trouvera pour quotient

$$a^2 z^4 + 2a^2 z^3 + 3a^2 z^2 + 2z + 1 = 0; \quad . \quad . \quad (y)$$

d'où l'on déduira les autres valeurs de z.

Comme cette analyse est rigoureuse, puisque nous n'avons rien négligé comme très petit, la solution du problème est complète, quelle que soit l'ouverture du miroir.

157. — En la supposant assez petite par rapport au rayon, on obtiendra une valeur approchée de z, à l'aide de la série suivante fournie par l'équation (y),

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{9}{32}a^2 - \frac{9}{32}a^4 - \frac{1395}{4096}a^6 - \text{etc.}$$

Et par suite, puisque $Y = a^3 z^3$,

$$Y = -\frac{a^3}{8} - \frac{27}{128}a^5 - \frac{675}{2048}a^7 - \text{etc.} \quad . \quad . \quad (z)$$

158. — Le premier terme de cette série suffit dans la plupart des cas qu'offre la pratique, et l'on a simplement

$$Y = \frac{-a^3}{8}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

ou, en nommant r le rayon de courbure du réflecteur,

$$Y = \frac{-a^3}{8\,r^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

L'aberration latérale correspondant à la demi-ouverture a est égale à $\frac{a^3}{2\,r^2}$, en vertu de l'équation (j), art. 133 : par conséquent, dans le cas de petites ouvertures, le rayon du cercle de moindre aberration est égal au quart de l'aberration latérale (au foyer) de l'anneau extérieur.

159. — *Coroll.* Le cercle de moindre aberration est plus rapproché du miroir que le foyer principal, de $\frac{3}{4} fq$ ou de $\frac{3}{4} \times$ l'aberration longitudinale $= \frac{3}{16} \cdot \frac{a^2}{r}$.

160. — Pour compléter la théorie des caustiques, il ne reste plus qu'à examiner le degré de concentration des rayons réfléchis en un point donné.

A cet effet, soit S (fig. 24) un point quelconque, et menons par ce point la droite P S Y q tangente à la caustique en Y. L'on peut alors regarder S comme appartenant à une surface conique engendrée par la révolution de la tangente P Y s q autour de l'axe, et tous les rayons réfléchis par l'anneau engendré par la révolution de l'élément P P′ seront contenus dans le solide conoïdal formé par la révolution de la figure pp' Y $q'q$ autour de ce même axe. Ainsi les rayons seront concentrés : 1° dans un plan parallèle à celui du papier, dans le rapport de P P′ à S S′ ou de P Y à S Y ; 2° dans un plan perpendiculaire à celui du papier, dans le rapport des circonférences des cercles engendrés par la révolution de P

et de S, ou de leurs rayons P M et S T. En vertu de ces deux rapports, la concentration en S sera représentée par

$$\frac{PM}{ST} \times \frac{PY}{SY}, \text{ ou par } \frac{Pq}{Sq} \times \frac{PY}{SY}:$$

si nous désignons donc par l'unité la densité des rayons au moment de leur réflexion en P, leur densité correspondante en S sera exprimée par

$$\frac{PY \,.\, Pq}{SY \,.\, Sq},$$

quelle que soit d'ailleurs la situation du point S.

161. — Mais il faut maintenant distinguer plusieurs cas.

1° Quand S se trouve dans les espaces K H V, N D W, et qu'ainsi l'on ne peut mener de tangente qui coupe le réflecteur dans son ouverture A B : par conséquent ces espaces ne reçoivent point de rayons, et la densité = o pour chaque point.

162. — 2° Quand S se trouve dans les espaces A G B, V H F E, E F D W, on ne peut mener qu'une seule tangente qui coupe le réflecteur entre A et B : de manière que, pour ces espaces, la densité est représentée simplement par

$$D = \frac{PY \,.\, Pq}{SY \,.\, Sq}.$$

163. — 3° Dans les espaces K G H et M G D (fig. 25) on peut mener deux tangentes qui passent par le point S, et qui touchent toutes deux la branche F K du même côté de l'axe que le point S. Soient $P_1 Y_1 Sq_1$ et $P_2 Y_2 Sq_2$ ces tangentes : le point S recevra les rayons appartenants à ces deux conoïdes convergents, et la densité sera, par conséquent, la somme de leurs densités respectives, ou

$$D = \frac{PY_1 \,.\, Pq_1}{SY_1 \,.\, Sq_1} + \frac{PY_2 \,.\, Pq_2}{SY_2 \,.\, Sq_2}.$$

164. — 4° Dans l'espace F H G D l'on peut mener trois tangentes, q_1 S Y_1 P_1, q_2 S Y_2 P_2 et q_3 S Y_3 P_3, tombant toutes entre A et B. Les deux premières (fig. 26) touchent la branche F *k* du même côté que S, et la troisième du côté opposé : celles-là appartiennent à des cônes de rayons convergents vers q_1 q_2, et la dernière à un cône convergent vers q_3, mais intercepté par S après sa rencontre avec q_3, et divergent de nouveau.

Il suit de là que la densité, dans ce cas, aura pour expression

$$D = \frac{PY_1 \cdot Pq_1}{SY_1 \cdot Sq_1} + \frac{PY_2 \cdot Pq_2}{SY_2 \cdot Sq_2} + \frac{PY_3 \cdot Pq_3}{SY_3 \cdot Sq_3}.$$

Comme le développement de ces fractions en fonction des coordonnées du point S nous conduirait à des calculs d'une complication excessive, nous nous contenterons de donner quelques applications relatives à des positions remarquables du point S.

165. — *Premier cas.* S est sur l'axe au-delà du foyer principal ou entre le miroir et le foyer des rayons extrêmes G. Ici Y coïncide avec F, ainsi que q, $D = \left(\frac{PF}{SF}\right)^2$, ce qui montre que la densité est en raison inverse du carré de la distance de S au foyer principal.

166. — *Deuxième cas.* S est sur l'axe entre le foyer principal et le foyer des rayons extrêmes G, c'est-à-dire sur la ligne GF. Ici $Sq_1 = 0$, $Sq_2 = 0$, $Sq_3 = 0$, ce qui rend infinis les trois termes dont est composée la valeur de D : il en résulte que la densité y est infiniment plus grande qu'à la surface du réflecteur.

167. — *Troisième cas.* S est en F. Ici non seulement $Sq = 0$, mais encore SY : par conséquent la densité est infiniment plus grande que dans le cas précédent, et atteint son maximum.

168. — *Quatrième cas.* S est sur la caustique même. Ici S Y = o, et par conséquent D est encore infini, c'est-à-dire que la densité y est infiniment plus grande qu'à la surface du réflecteur; et plus S approche de F, plus cette densité augmente par la diminution des valeurs de S *q*.

169. — *Cinquième cas.* S est quelque part en H *z* D dans le cercle de moindre aberration. Au centre *z* et à la circonférence H la densité est infinie : entre ces deux positions elle devient finie, et diminue jusqu'à ce qu'elle atteigne son minimum; après quoi elle recommence à croître, d'après une loi trop compliquée pour en faire ici la recherche. On observera que les relations énoncées dans ces articles (160-169) sont générales, et ne sont point restreintes au cas où la surface réfléchissante est purement sphérique.

170. — Dans toute la discussion précédente, nous avons supposé que le point S recevait les rayons perpendiculairement. On doit donc entendre par la densité des rayons, non le nombre des rayons qui tombent sur une surface plane donnée, mais le nombre de ceux qui passent par une ouverture circulaire infiniment petite de la voûte céleste, ou qui sont reçus en S sur un corps sphérique infiniment petit.

Cependant, lorsque l'ouverture est petite, un écran perpendiculaire à l'axe recevra les rayons partis de chaque point, sous un angle d'incidence presque droit; et par conséquent les expressions précédemment obtenues représenteront l'intensité d'éclairement pour chaque point d'une telle surface, en supposant toutefois que l'écran n'intercepte aucun rayon incident.

Nous renvoyons le lecteur qui désirerait plus de développements, au sujet des caustiques, aux ouvrages suivants. Tschirnaüs, *Actes de Leipzig*, 1682, et *Histoire de l'Académie*, tome II, page 54, 1688; De la Hire, *Traité des épicycloïdes*, et *Mém. de l'Acad.*, vol. X; Smith's *Optics*; Carré, *Mém. de l'Acad.*, 1703; J. Bernouilli *Opera omnia*, vol. III,

page 464; L'Hôpital, *Analyse des infiniment petits;* Hayes's *Fluxions;* Petit, *Correspondance de l'École polytechnique*, II, 553; Malus, *Journal de l'École polyt.*, vol. VI; Gergonne, *Annales des Mathématiques*, XI, p. 229; De la Rive, *Dissertation sur les caustiques*, etc.; Sturm, *Annales des Math.*, XVI; Gergonne, *idem.*

DE LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE PAR DES MILIEUX NON CRISTALLISÉS.

---

§ VI. — *De la réfraction d'une lumière homogène par rapport à des surfaces planes.*

Indice de réfraction. — Réfraction, dans le vide, d'un rayon sortant d'un milieu. — Limite de l'angle de réfraction. — Limite de la possibilité d'émergence d'un rayon hors d'un milieu. — Quand le rayon ne peut plus émerger, il se réfléchit. — Cette réflexion est totale. — Expérience qui prouve la totalité de cette réflexion. — Apparences des objets externes pour un spectateur placé sous l'eau. — Explication de la forme elliptique du soleil couchant. — Réfraction à travers des surfaces parallèles. — Preuve expérimentale. — Réfraction à la surface commune de deux milieux en contact. — Loi de la réfraction d'un milieu à l'égard d'un autre. — Indices de réfraction absolus et relatifs. — Problème général de la réfraction, à travers un système quelconque de surfaces planes. — Premier cas : lorsque deux réfractions ont lieu dans le même plan. — Deuxième cas : les deux réfractions se font dans un plan, sur les faces d'un prisme dans le vide. — Première manière de déterminer, par l'expérience, l'indice de réfraction. — Limite de l'angle réfringent d'un prisme. — Angle d'un prisme. — Cas de la moindre déviation. — Expression de la plus petite déviation. — Autre manière de déterminer l'indice de réfraction d'un prisme par l'expérience. — Cas de la moindre déviation, après un nombre quelconque de réfractions. — Cas où les plans de première et de deuxième réfraction sont à angles droits.

171. — Quand un rayon de lumière tombe sur la surface d'un milieu transparent non cristallisé, une partie de ce rayon se réfléchit; une autre partie se répand dans tous les sens, et sert à rendre la surface visible : le reste entre dans le milieu et y poursuit sa route.

172. — Dans le phénomène de la réflexion, la loi d'où dépend la direction du rayon réfléchi est la même pour tous les milieux, c'est-à-dire que l'angle de réflexion égale toujours l'angle d'incidence. Il n'en est pas de même de la réfraction, et chaque milieu exerce une action particulière sur la lumière : les uns font dévier le rayon incident beaucoup plus que les autres.

Quelle que soit la nature du milieu dirimant, les lois suivantes s'observent toujours, et suffisent pour déterminer la direction du rayon réfracté, pourvu que l'on connaisse la nature du milieu.

173. — *Première loi.* Le rayon incident, la perpendiculaire à la surface, au point d'incidence, et le rayon réfracté, sont tous dans un même plan.

174. — *Deuxième loi.* Le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent des deux côtés de la perpendiculaire.

175. — *Troisième loi.* Quelle que soit l'inclinaison du rayon incident sur la surface du milieu, le sinus de l'angle entre le rayon incident et la perpendiculaire est, avec le sinus de l'angle entre cette droite et le rayon réfracté, dans un rapport constant.

176. — Ces lois ont lieu également pour des surfaces courbes : elles ont été vérifiées avec le plus grand soin, à l'aide d'expériences très délicates; et tous les phénomènes de la lumière réfractée se sont trouvés exactement conformes aux résultats de la théorie mathématique.

177. — Soient A C B (fig. 23) la surface réfractante, P C p la perpendiculaire au point d'incidence C, S C et Cs les rayons incident et réfracté : nous aurons

$$\sin PCS : \sin pCs :: \mu : 1,$$

μ étant une quantité constante, c'est-à-dire qu'elle reste la



même pour le milieu A B, quoique sa valeur varie pour chaque milieu différent.

178. — Pour abréger le discours, on dit simplement le sinus d'incidence et le sinus de réfraction, au lieu du sinus de l'angle d'incidence et de l'angle de réfraction.

179. — L'on doit s'assurer de la valeur numérique de la quantité μ ou de $\frac{\text{sinus d'incidence}}{\text{sinus de réfraction}}$, pour un milieu donné, avant de pouvoir regarder sa loi de réfraction comme parfaitement connue. On peut obtenir cette valeur par l'expérience, soit en mesurant directement l'angle de réfraction correspondant à un angle d'incidence donné (car la valeur de la fraction précédente restera la même, quel que soit l'angle d'incidence), soit en employant des procédés plus faciles et plus précis, que nous décrirons plus tard.

Cette quantité μ s'appelle l'*indice* de réfraction du milieu A B.

180. — Le milieu que traversait le rayon avant son incidence sur A B est regardé ici comme vide. Si le milieu A B était également vide, il est évident que le rayon ne changerait point de direction, et qu'ainsi l'angle d'incidence serait égal à l'angle de réfraction; ce qui donnerait $\mu = 1$.

Cette valeur de μ est la plus petite de toutes; et l'on ne connaît point de milieu dans lequel le rayon venant du vide fasse avec la perpendiculaire un angle de réfraction plus grand que l'angle d'incidence. La plus grande valeur de μ que l'on ait trouvée jusqu'à présent est $\mu = 3$: elle a lieu pour le chromate de plomb. Entre ces deux limites (1 et 3), il n'est presque aucun nombre qui n'appartienne à quelque corps transparent : ainsi pour l'air, à sa densité ordinaire, $\mu = 1.00028$; tandis que, pour l'eau, ce rapport est 1.336; pour le crown-glass ordinaire, 1.535; pour le flint-glass, 1.6; pour l'huile de casse, 1.641; pour le diamant, 2.487,

et pour la plus grande réfraction due au chromate de plomb, 3 . o.

181. — C'est nne loi générale de l'optique que la visibilité de deux points est réciproque, quel que soit le chemin suivi par les rayons pour aller de l'un à l'autre. En d'autres termes, que, si le rayon de lumière parti de A arrive en B après un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, le rayon qui partirait de B arriverait en A, en suivant précisément la même direction en sens contraire. Il résulte de ce principe que, si le rayon S C incident à la surface extérieure du milieu A B (fig. 23) suit après sa réfraction le chemin C *s*, de même le rayon *s* C, tombant sur la surface extérieure du milieu, sera réfracté à l'extérieur dans la direction C S, en s'écartant davantage de la perpendiculaire.

Par conséquent, puisque, dans ce cas, l'angle d'incidence est le même que l'angle de réfraction du cas précédent, et *vice versâ*, nous aurons ici

$$\frac{\text{sin. d'incidence}}{\text{sin. de réfraction}} = \frac{1}{\mu}.$$

Nous voyons par là que l'indice de réfraction à l'extérieur d'un milieu est réciproque à l'indice de réfraction à l'intérieur.

182. — Il s'ensuit qu'un rayon de lumière peut passer du vide dans un milieu sous un angle d'incidence quelconque : en effet, puisque

$$\text{sin de réfr.} = \sin pcs = \frac{1}{\mu} \cdot \sin PCS,$$

la valeur de μ surpassant l'unité, le sinus de pcs sera nécessairement moindre que celui de PCS, et partant, moindre que l'unité : l'angle de réfraction ne peut donc jamais devenir imaginaire.

Ainsi, lorsque l'angle d'incidence P C S croît depuis zéro,

c'est-à-dire lorsque le rayon S C devient de plus en plus oblique à la surface, jusqu'à ce qu'il ne fasse plus que l'effleurer, comme en S″ C, le rayon réfracté devient aussi plus oblique, mais beaucoup moins vite, et n'atteint jamais une obliquité plus grande que dans la position C s'', pour laquelle

$$\sin p\,C\,s'' = \frac{\sin 90^\circ}{\mu} = \frac{1}{\mu}.$$

Cet angle-limite est, comme on le voit, le plus grand angle de réfraction en passant du vide dans le milieu ; et sa valeur pour un milieu donné s'obtient en calculant l'angle dont le sinus est réciproque à l'indice de réfraction.

Pour l'eau, par exemple, l'angle de réfraction ne peut excéder arc . sin $= \frac{1}{1.336}$ ou 48° 27′ 40″ ; pour le crown-glass, la limite est 40° 39′ ; pour le flint-glass, 38° 41′ ; pour le diamant, 23° 42′ ; tandis que, pour le chromate de plomb, la limite descend jusqu'à 19° 28′ 20″.

183. — Réciproquement, quand un rayon tombe sur la surface intérieure d'un milieu, sous un angle plus petit que l'angle-limite dont le sinus $= \frac{1}{\mu}$, il est réfracté, et émerge, d'après la loi exposée à l'art. 181, en s'écartant davantage de la perpendiculaire. Mais l'angle de réfraction P C S croissant plus rapidement que l'angle d'incidence p C s, lorsque celui-ci est parvenu à la limite pCs'', le rayon émerge dans la direction C S″, en effleurant seulement la surface extérieure. Si l'angle d'incidence vient à croître encore davantage, l'angle de réfraction devient imaginaire : car l'on a

$$\sin P\,C\,S = \mu \times \sin p\,C\,s\,;$$

et si $\sin p\,C\,s > \frac{1}{\mu}$, le sinus de P C S doit surpasser l'unité.

Ceci nous montre que le rayon ne peut émerger ; mais, pour savoir ce qu'il devient, nous devons avoir recours à l'expérience : elle nous apprend que, passé la limite posée

plus haut, le rayon, au lieu d'être réfracté à l'extérieur du milieu, reste dans l'intérieur et se réfléchit totalement en faisant un angle de réflexion p C S''' $= p$ C s'''.

Quand le rayon tombe sur la surface extérieure du milieu, une partie (R) de ce rayon est réfléchie, et le reste (r) est réfracté.

Le rapport de (R) à (r) est le plus petit possible pour l'incidence perpendiculaire, et il croît régulièremeut jusqu'à ce que l'angle d'incidence $= 90°$; mais, lors même que l'obliquité devient très grande, et que le rayon semble effleurer la surface, la réflexion n'est jamais totale ni presque totale, et la plus grande partie du rayon passe dans le milieu.

184. — D'un autre côté, quand le rayon tombe sur la surface intérieure, la partie (R), qui se réfléchit, prend des accroissements réguliers, mais assez lents, jusqu'à ce que l'angle d'incidence devienne égal à l'angle maximum, dont le sinus est $\frac{1}{\mu}$: à cet instant, la partie réfractée (r) devient subitement égale à zéro, et le rayon se réfléchit entièrement. Ce passage soudain de la réfraction à la réflexion, cette espèce de solution de continuité, est un des phénomènes les plus curieux et les plus intéressants de l'optique; et nous verrons plus loin qu'il se rattache aux points les plus importants de la théorie de la lumière.

185. — La réflexion obtenue par cette méthode, étant totale, surpasse en éclat toutes celles que l'on devrait à d'autres moyens, au mercure, par exemple, ou à des métaux polis avec le plus grand soin. On peut s'en assurer d'une manière fort simple, en remplissant d'eau un verre à boire, que l'on tiendra au-dessus de l'œil, comme dans la fig. 24, n° 2. Si l'on regarde alors obliquement dans la direction Eac, toute la surface paraîtra comme d'argent poli, avec un vif éclat métallique, et la partie C B d'un objet quelconque (de la cuillère A C B, par exemple), qui se trouve plongée dans

le milieu, sera réfléchie par la surface intérieure comme par un miroir, mais avec un éclat infiniment supérieur.

Cette propriété de réflexion interne est employée avec avantage dans la *chambre claire;* et l'on pourrait en tirer un grand parti dans la construction d'autres instruments d'optique, du télescope newtonien surtout, pour obvier à la perte de lumière dans la seconde réflexion, perte dont il sera question plns tard.

186. — On tire de ce phénomène une foule de conséquences curieuses par rapport à la visiou qui s'opère sous l'eau.

Un œil placé dans une eau parfaitement tranquille, tel que celui d'un poisson ou d'un plongeur, verra tous les objets externes au-dessus de lui comme s'ils étaient dans un cercle de 96° 55′ 20″ de diamètre; mais tous les objets au-dessous de l'horizon ne seront point vus dans cet espace, et ceux qui se trouveront dans le voisinage de l'horizon paraîtront contournés et rétrécis dans leurs dimensions, surtout dans le sens de la hauteur. Au-delà des limites de ce cercle, le fond de l'eau et les objets submergés seront réfléchis et se peindront à la vue aussi vivement que par la vision directe. De plus, l'espace circulaire dont nous venons de parler paraîtra entouré d'un arc-en-ciel perpétuel, coloré faiblement, mais avec beaucoup de délicatesse.

Nous expliquerons plus tard la cause de cette apparence; mais nous n'avons pas besoin de nous plonger dans l'eau pour observer, en partie du moins, ces phénomènes curieux : nous vivons dans un océan d'air, c'est-à-dire dans un milieu doué d'une faible réfraction, à la vérité, en comparaison de l'eau; cependant l'apparence des objets voisins de l'horizon en éprouve une certaine modification; ils paraissent déformés et rapetissés. Ainsi le soleil, à son coucher, au lieu d'être circulaire, prend une figure elliptique ou plutôt déprimée, la partie inférieure étant beaucoup plus aplatie que la partie supérieure; ce changement de figure est même assez considérable pour ex-

citer l'attention d'un spectateur indifférent. La forme sphérique de l'atmosphère et sa diminution de densité dans les hautes régions empêchent la production des apparences que nous avons décrites plus haut.

187. — Si le milieu est terminé par des surfaces parallèles, le rayon qui le traversera aura à sa sortie du milieu la même direction qu'avant d'y entrer. (Fig. 25, n° 2.)

Soient A B, D F, les plans parallèles qui bornent le milieu; S C E T un rayon réfracté; P C p, Q E q, des perpendiculaires à ces plans en C et en E : nous aurons

$$\sin SCP : \sin pCE\ (= \sin CEQ) :: \mu : 1,$$
$$\sin CEQ : \sin qET :: 1 : \mu.$$

En combinant ces deux proportions,

$$\sin SCP = \sin qET,$$

et par conséquent

$$SCP = qET$$ et le rayon ET est parallèle à S C.

Cette proposition peut se démontrer par l'expérience : en plaçant le verre plan (sans tain) d'un sextant devant l'objectif d'un télescope dirigé vers un objet éloigné ou devant l'œil nu, et en donnant ensuite à ce verre toutes les inclinaisons que l'on voudra avec le rayon visuel, l'objet ne changera pas de position apparente.

188. — *Expérience*. Plaçons parallèlement à l'horizon un plateau de verre ou d'une autre matière diaphane, et versons-y un fluide transparent quelconque, de manière à former un milieu composé de deux autres de pouvoirs réfringents différents, qui se trouvent en contact et limités par des plans parallèles; supposons alors que l'on regarde, à travers cet assemblage, un objet éloigné situé au-dessus, une étoile, par exemple, soit avec l'œil nu, soit avec un télescope : on verra cet objet absolument dans la même

position que si l'on enlevait les milieux, quelle que soit d'ailleurs la hauteur de l'objet ou de l'étoile. Il suit de là qu'un rayon S B (fig. 26, n° 2), tombant sur un système de milieux A F et D I, semblable à celui qui vient d'être décrit, émergera dans la direction H T parallèle au rayon incident S B.

189. — *Théorème*. Soient deux milieux quelconques (n°s 1 et 2) dont les indices de réfraction à l'égard du vide soient μ et μ'. Si l'on met ces milieux dans un contact parfait (comme un fluide avec un solide ou deux fluides entre eux), le pouvoir réfringent de l'un d'eux (n° 1), par rapport à l'autre (n° 2), sera le même que celui du vide par rapport à un milieu dont l'indice de réfraction serait $\frac{\mu'}{\mu}$, c'est-à-dire l'indice de réfraction du second milieu divisé par celui du premier.

Soit D E F (fig. 26, n° 2) la surface commune de deux milieux contenus entre des plateaux parallèles A F, D I, comme dans la dernière expérience : le rayon SB pris arbitrairement, et formant un angle d'incidence quelconque avec la surface A C, émergera en G I dans la direction H T parallèle à S B. Soit B E H sa route à travers les milieux, et tirons les perpendiculaires P Bp, Q Eq, R Hr : alors

$$\sin SBP : \sin EBp \; (= \sin BEQ) :: \mu : 1,$$

$$\sin RHE \; (= \sin qEH) : \sin rHT \; (= \sin PBS) :: 1 : \mu'.$$

En combinant ces deux proportions, on en déduit

$$\sin HEq : \sin BEQ :: \mu : \mu', \quad \frac{\sin BEQ}{\sin HEq} = \frac{\mu'}{\mu}.$$

Mais B E Q est l'angle d'incidence et H E q l'angle de réfraction à la surface commune des milieux : par conséquent l'indice *relatif* ou l'indice de réfraction, en passant du pre-

mier milieu dans le second, est égal au quotient $\frac{\mu'}{\mu}$ des indices *absolus* μ' et μ, dus à la réfraction d'un rayon passant du vide dans le second et dans le premier milieu.

190. — Cette démonstration suppose, à la vérité, que les angles d'incidence et de réfraction à la surface commune n'excèdent pas les limites des angles de réfraction en passant du vide dans chaque milieu. Cependant le principe énoncé plus haut est indépendant de cette condition, comme on peut le démontrer en mesurant directement les angles d'incidence et de réfraction dans un cas quelconque. Jusqu'à présent nous devons donc considérer cette vérité comme purement expérimentale.

191. — *Exemple*. On demande le rapport du sinus d'incidence à celui de réfraction, en passant de l'eau dans le flint-glass. L'indice de réfraction du flint-glass étant 1.60, et celui de l'eau 1.336, le rapport de réfraction demandé égale

$$\frac{1.60}{1.336} = 1.197.$$

192. — Si l'indice $\mu = -1$, la loi générale de la réfraction devient celle de la réflexion : ainsi tous les cas de la réflexion, quant à la direction du rayon réfléchi, sont compris dans ceux de la réfraction.

De la réfraction ordinaire de la lumière à travers un système de surfaces planes, et de la réfraction à travers des prismes.

193. — *Définitions*. En optique, on nomme *prisme* tout milieu perméable à la lumière, et possédant deux surfaces planes, formant entre elles un angle quelconque.

194. — L'*arête* du prisme est la ligne réelle ou imaginaire suivant laquelle ces deux plans se coupent, ou se couperaient en les prolongeant.

195. — L'*angle réfringent* du prisme est celui de ces deux plans.

196. — Les *faces* du prisme sont ces plans mêmes.

197. — Le plan perpendiculaire aux deux surfaces, et par conséquent à l'arête du prisme, s'appelle la *section principale* du prisme ou des deux surfaces. Cette expression a déjà été employée dans son acception générale au chapitre De la réflexion.

Problème.

Déterminer la direction d'un rayon après sa réfraction à travers un système quelconque de surfaces planes.

198. — *Construction*. Puisque la direction du rayon est la même, s'il est réfracté par les surfaces mêmes ou par d'autres qui leur soient respectivement parallèles, concevons ces surfaces parallèles passant toutes par un même point; et en ce point, extérieur aux milieux dirimants, élevons les droites CP, CP′, CP″, perpendiculaires aux surfaces (fig. 27). Soit SC la direction du rayon incident; entre CP et CS menons CS′ dans le plan SCP, de telle sorte que

$$\sin PCS' = \frac{1}{\mu} \cdot \sin PCS,$$

μ étant l'indice de réfraction du premier milieu, par rapport à celui où le rayon se mouvait originairement et que pour le moment nous supposerons vide : S′C sera alors la direction du rayon après la première réfraction.

Maintenant, soit μ' l'indice de réfraction relatif du second milieu par rapport au premier, ou $\mu\mu'$ son indice absolu par

rapport au vide; tirons CS'' dans le plan $S'CP'$, de telle manière que

$$\sin P'CS'' = \frac{1}{\mu'} \cdot \sin P'CS' :$$

alors $S''C$ sera la direction du rayon deux fois réfracté, et ainsi de suite.

199. — *Analyse générale.* Soit

$\alpha = SCP$ le premier angle d'incidence,
$\alpha' = S'CP'$ l'angle d'incidence à la seconde surface,
$I = PCP'$ l'inclinaison des plans donnés.

Dénotons en outre par

$\theta = PS'P' =$ l'angle entre les plans de première et de seconde réfraction,
$\psi = SPP' =$ l'angle entre le plan de première réfraction et la section principale des deux premières surfaces réfractantes,
$\varphi = S'P'P =$ l'angle entre le plan de seconde réfraction et cette même section principale,
$\rho = PCS' =$ le premier angle de réfraction,
$\rho' = P'CS'' =$ le second angle de réfraction,
$D = SCS'' =$ la déviation après la seconde réfraction.

En regardant $SS'S''PP'$ comme faisant partie de la surface d'une sphère dont C serait le centre, nous connaissons dans le triangle sphérique $SS'S''$ les côtés SS', $S'S''$, et l'angle $SS'S''$, ce qui suffit pour déterminer la déviation SS''. En écrivant algébriquement les conditions du problème, puisque ρ et ρ' sont les angles de réfraction correspondants aux angles d'incidence α et α', et aux indices de réfraction μ et μ', l'on a

$$\left.\begin{array}{l}
\sin\alpha = \mu\,.\sin\rho,\\
\cos\alpha' = \cos\rho\,.\cos \mathrm{I} + \sin\rho\,.\sin \mathrm{I}\ \mathrm{oos}\,\psi,\\
\sin\alpha' = \mu'\,.\sin\rho',\\
\sin\alpha'\,.\sin\theta = \sin \mathrm{I}\,.\sin\psi,\\
\sin\alpha'\,.\sin\varphi = \sin\rho\,.\sin\psi,\\
\cos \mathrm{D} = \cos(\alpha-\rho)\,.\cos(\alpha'-\rho') - \sin(\alpha-\rho)\sin(\alpha'-\rho')\cos\theta.
\end{array}\right\}(\mathrm{B})$$

200. — Au moyen de ces équations, qui sont cependant plus compliquées que dans le cas de la réflexion [art. 99, éq. (A)], nous pouvons déterminer dans toutes les circonstances la route d'un rayon après deux réfractions; et, de même que pour la réflexion, il suffit de connaître cinq des onze quantités α, α', ρ, ρ', μ, μ', I, θ, φ, ψ, D, pour trouver les six autres, et passer de là, si l'on veut, à une nouvelle réfraction. Il est inutile de faire observer qu'à l'exception de quelques cas particuliers, la complication de la formule la rend excessivement embarrassante quand on considère plus de deux réfractions. Maintenant le problème est résolu généralement; mais son importance en optique exige qne nous discutions avec détail plusieurs cas particuliers.

201. — *Premier cas.* Quand on ne considère que deux surfaces planes, et que la réfraction se fait pour toutes deux dans un même plan, c'cst-à-dire dans celui de la section principale de ces deux plans ou du prisme qu'ils renferment.

Soit S C (fig. 28) un rayon venant du vide et tombant sur la surface réfractante A C du prisme C A D, dans le plan de sa section principale; menons P C perpendiculaire à cette surface, et C S' de manière à ce que

$$\sin \mathrm{PCS}' : \sin \mathrm{PCS} :: 1 : \mu,$$

et S' C sera la direction du rayon réfracté C D.

Elevons maintenant C P′ perpendiculaire à A D, et prenons l'angle P′C S″, tel que

$$\sin P'CS'' : \sin P'CS' :: 1 : \mu'.$$

μ' étant l'indice de réfraction relatif du milieu A C D par rapport au milieu A D E, S″ C sera alors parallèle au rayon après la seconde réfraction. Tirons donc D E parallèlement à S″ C, et cette droite représentera le rayon deux fois réfracté.

Nommant, comme dans le cas général,

S C P, α; S′ C P, ρ; S′ C P′, α'; S″ C P′, ρ'; et P C P′, I,

nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \mu \sin\rho, \ \alpha' = I + \rho, \ \sin\alpha' = \mu' \sin\rho', \\ \text{et } \pm D = SCS'' = \alpha - \rho' + I, \ \theta = 0, \ \varphi = 0. \end{array}\right\} (a)$$

La première de ces équations donne ρ quand on connaît μ et α; la seconde donne la valeur de α' quand on a déterminé ρ; la troisième donne ρ' en fonction de α' et de μ', et la dernière donne la déviation D.

202. — Le signe de D est ambigu. Si nous regardons comme positive la déviation du rayon qui se rapproche du côté le plus épais du prisme, et s'écarte par conséquent de l'arête, nous devons prendre le signe inférieur, ou

$$D = \rho' - I - \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Dans le cas contraire, il faudrait prendre le signe supérieur.

Nous adopterons la première convention, que les calculs subséquents nous ont fait trouver plus commode.

203. — *Deuxième cas.* Si dans le premier cas nous supposons que le milieu dans lequel passe le rayon émergent soit

le même que celui qu'il a quitté pour entrer dans le prisme (le vide, par exemple), nous avons

$$\mu' = \frac{1}{\mu}.$$

C'est le cas de la réfraction à travers un prisme ordinaire de verre ou d'une autre matière transparente : I est alors l'angle réfringent du prisme, μ son indice de réfraction, absolu si le prisme est placé dans le vide, relatif s'il est dans un autre milieu ; et le système d'équations représentant la déviation et la direction du rayon réfracté devient

$$\left.\begin{aligned} \sin \alpha &= \mu \,.\, \sin \rho, \\ \alpha' &= \mathrm{I} \,.\, + \rho, \\ \sin \rho' &= \mu \sin \alpha', \\ \mathrm{D} &= \rho' - \alpha - \mathrm{I}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

204. — *Coroll.* 1. La déviation peut encore s'exprimer sous une autre forme, que nous aurons occasion d'employer plus tard. L'on a

$$\begin{aligned} \sin(\mathrm{I}+\mathrm{D}+\alpha) = \sin \rho' = \mu \sin \alpha' &= \mu \sin(\mathrm{I}+\rho) \\ &= \mu(\sin \rho \cos \mathrm{I} + \cos \rho \sin \mathrm{I}), \\ = \mu\left[\sin \rho - 2 \sin \rho \left(\sin \frac{\mathrm{I}}{2}\right)^2 + 2 \cos \rho \,.\, \cos \frac{\mathrm{I}}{2} \,.\, \sin \frac{\mathrm{I}}{2}\right], \end{aligned}$$

parce que

$$\cos \mathrm{I} = 1 - 2\left(\sin \frac{\mathrm{I}}{2}\right)^2 \text{ et } \sin \mathrm{I} = 2 \sin \frac{\mathrm{I}}{2} \cos \frac{\mathrm{I}}{2}.$$

Mais

$$\mu \sin \rho = \sin \alpha,$$

en vertu de la première des équations (*c*) : il résulte de là que

$$\sin(\mathrm{I}+\mathrm{D}+\alpha) = \sin \alpha + 2 \mu \sin \frac{\mathrm{I}}{2} \,.\, \cos\left(\frac{\mathrm{I}}{2} + \rho\right); \quad (d)$$

d'où l'on tire facilement la valeur de D, quand I et α sont donnés, et que l'on a calculé ρ au moyen de l'équation

$$\sin \rho = \frac{1}{\mu} \cdot \sin \alpha.$$

205. — *Coroll.* 2. Si $\alpha = 0$, ou que le rayon entre perpendiculairement dans le premier milieu, nous avons aussi $\rho = 0$, et l'expression (*d*) devient simplement

$$\sin (I + D) = \mu \sin I ; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

d'où

$$\mu = \frac{\sin (I + D)}{\sin I} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

Nous voyons ainsi que, si $\mu \sin I > 1$, ou si I, angle du prisme, surpasse $\sin^{-1} \frac{1}{\mu}$ (1) angle limite ou le plus petit angle de réflexion interne totale, la déviation devient imaginaire, et le rayon ne peut être transmis sous une telle incidence.

206. — *Coroll.* 3. L'équation (*f*) fournit une méthode directe de déterminer par l'expérience l'indice de réfraction d'un milieu quelconque auquel peut donner la forme d'un prisme; il suffit de mesurer l'angle du prisme et l'angle de déviation d'un rayon qui le traverse en tombant perpendiculairement sur une de ses faces : ainsi I et D étant donnés par l'observation, μ est connu. Cette méthode n'est cependant pas la plus avantageuse : nous en ferons bientôt connaître une meilleure.

207. — *Définitions.* Un milieu est dit, en optique, plus

---

(1) Le lecteur observera que l'expression $\sin^{-1} \frac{1}{\mu}$ a la même signification que arc $\left(\sin = \frac{1}{\mu}\right)$. (*Note de l'auteur.*)



dense ou plus *rare* qu'un autre, suivant que le rayon, en passant du premier dans le second, *se rapproche* ou *s'écarte* de la perpendiculaire. Nous entendons par la *densité réfractive* d'un milieu la propriété dont il est doué de rapprocher plus ou moins de la perpendiculaire le rayon venant du vide, propriété dont la mesure numérique est l'indice de réfraction μ.

Problème.

208. — Etant donné l'indice de réfraction d'un prisme, trouver la limite de son angle réfringent, ou l'angle le plus grand que puissent comprendre ses faces pour qu'elles soient traversées toutes deux par le rayon.

Cette limite est précisément la valeur de I, qui rend l'angle de réfraction ρ' imaginaire pour tous les angles d'incidence à la première surface ou pour toutes les valeurs de α, c'est-à-dire qui rend positive la différence

$$\mu \,.\, \sin\,(\mathrm{I} + \rho) - 1,$$

ou

$$\sin\,(\mathrm{I} + \rho) - \frac{1}{\mu};$$

ou encore (puisque $\mathrm{I} + \rho$ ne peut jamais excéder 90°), qui rend positif dans tous les cas

$$\mathrm{I} + \rho - \sin^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Or

$$\rho = \sin^{-1}\frac{\sin\,\alpha}{\mu};$$

et par conséquent la valeur de α la moins propre à donner à la fonction une valeur positive, en restant dans les bornes de la question, est — 90°, qui répond à la plus grande valeur négative de

$$\rho = -\sin^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Par conséquent, pour que la seconde réfraction ne puisse avoir lieu, I doit être au moins assez grand pour que

$$I - 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

soit positif; c'est-à-dire que I, l'angle d'inclinaison des faces du prisme, ou plus brièvement l'*angle du prisme*, doit être au moins égal au double de l'angle maximum d'incidence interne.

209. — Par exemple, si $\mu = 2$, I doit être au moins de 60°. Dans ce cas, aucun rayon ne peut être transmis directement par un prisme équilatéral formé du milieu en question.

210. — *Coroll.* 4. Si $\mu > 1$, ou si le prisme est plus dense que le milieu ambiant, $\mu \sin I$ est plus grand que $\sin I$,

$$\text{et } \sin^{-1}(\mu \sin I) > I;$$

de manière que la valeur de D [équation (*d*), art. 204] est positive, c'est-à-dire que le rayon se rapproche de la partie la plus épaisse du prisme (voy. fig. 29). Le contraire a lieu si $\mu < 1$, ou si le prisme est plus rare que le milieu (voy. fig. 30).

Problème.

211. — En supposant toujours les mêmes circonstances (le prisme dans le vide ou dans un milieu d'égale densité autour de ses deux faces), on demande dans quelle direction le rayon doit tomber sur la première surface pour qu'il subisse la plus petite déviation possible.

Puisque $D = \rho' - \alpha - I$ [(*c*), art. 203], et que, par la condition de minimum, $dD = 0$, nous devons avoir

$$d\rho' = d\alpha.$$

Or les équations (*c*) donnent par la différentiation

$$d\alpha \cos\alpha = \mu\, d\rho \,.\, \cos\rho,\ d\alpha' = d\rho,\ d\rho' \,.\, \cos\rho' = \mu\, d\alpha' \,.\, \cos\alpha',$$

ou

$$d\rho' \,.\, \cos\rho' = \mu\, d\rho \,.\, \cos\alpha' = d\alpha \,.\, \frac{\cos\alpha \cos\alpha'}{\cos\rho},$$

$$\frac{d\rho}{d\alpha}(=1) = \frac{\cos\alpha \cos\alpha'}{\cos\rho \cos\rho'}, \quad \cos\alpha \cos\alpha' = \cos\rho \cos\rho'.$$

Elevant au carré les deux membres de cette dernière équation,

$$(1 - \sin^2\alpha)\,(1 - \sin^2\alpha') = (1 - \sin^2\rho)\,(1 - \sin^2\rho').$$

En substituant dans celle-ci, au lieu de $\sin\alpha$ et de $\sin\rho'$, leurs équivalents $\mu \sin\rho$ et $\mu \sin\alpha'$, il vient

$$\frac{(1 - \mu^2 \,.\, \sin^2\rho)}{1 - \sin^2\rho} = \frac{1 - \mu^2 \,.\, \sin^2\alpha'}{1 - \sin^2\alpha'};$$

ce qui donne, après réduction,

$$\sin^2\rho = \sin^2\alpha',$$

et par conséquent

$$\rho = \pm\alpha',$$

c'est-à-dire

$$I + \rho = I \pm \alpha' \text{ ou } \alpha' = I \pm \alpha'.$$

Le signe supérieur ne satisfait pas à la question, et donnerait

$$I = 0.$$

L'on prendra donc le signe inférieur, qui donne

$$\alpha' = \frac{I}{2},$$

et remplit les conditions du problème : on en conclura que

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} I, \quad \rho = -\tfrac{1}{2} I, \quad \sin\alpha = -\mu \,.\, \sin\left(\frac{I}{2}\right),$$

$$\sin\rho' = +\mu \sin\left(\frac{I}{2}\right).$$

Cet état de choses est représenté par la figure 31, pour le cas où $\mu > 1$, c'est-à-dire que le prisme est plus dense que le

milieu ambiant, et par la figure 32, lorsqu'au contraire la matière du prisme est plus rare, c'est-à-dire quand $\mu < 1$. Dans les deux cas, le signe négatif de α indique que le rayon incident doit tomber du côté de la perpendiculaire CP, opposé à l'arète du prisme (comme SC). Les équations

$$\rho \; (= \mathrm{PCS'}) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{I} \; (= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{PCP'})$$

$$\text{et } \alpha' = \mathrm{P'CS'} = +\tfrac{1}{2}\,\mathrm{PCP'}$$

signifient que le rayon réfracté S'CD partage en deux parties égales l'angle PCP', et par conséquent que la partie CD dans le prisme fait des angles égaux avec les deux faces. Dans les deux cas aussi l'égalité des angles α et ρ' (en faisant abstraction de leurs signes) montre que les rayons incident et émergent font des angles égaux avec les mêmes faces, ce qui prouve que l'on peut indifféremment faire tomber le rayon incident sur l'une ou sur l'autre.

212. — *Coroll.* 5. Dans le cas actuel, la déviation totale égale

$$\mathrm{D} = \rho' - \alpha - \mathrm{I} = 2 \sin^{-1}\left(\mu \sin \frac{\mathrm{I}}{2}\right) - \mathrm{I}; \quad (f)$$

d'où l'on tire

$$\sin\left(\frac{\mathrm{I}+\mathrm{D}}{2}\right) = \mu \,.\, \sin \frac{\mathrm{I}}{2}.$$

213. — *Coroll.* 6. Dans le même cas, I étant donné par la mesure directe, et D par l'observation de la déviation minimum d'un rayon réfracté par un prisme, on obtient sur-le-champ la valeur de l'indice de réfraction μ :

$$\mu = \frac{\sin\left(\frac{\mathrm{I}+\mathrm{D}}{2}\right)}{\sin \frac{\mathrm{I}}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (g)$$

Cette formule donne le moyen le plus exact et le plus fa-

cile de trouver l'indice de réfraction de tout milieu susceptible de prendre la forme d'un prisme.

214. — *Exemple.* Un prisme de silicate de plomb, composé d'un atome de silice et d'un atome d'oxide de plomb, a pour angle réfringent 21° 12'. La déviation minimum qu'il produit = 24° 46' pour un rayon de lumière rouge homogène. Quel est l'indice de réfraction pour ce rayon ?

$$I = 21^\circ\,12',\ \frac{I}{2} = 10^\circ\,36',\ D = 24^\circ\,46',\ \frac{D}{2} = 12^\circ\,23',$$

$$\sin\left[\frac{I}{2} + \frac{D}{2}\right] = \sin 22^\circ\,59', \qquad 9\,.\,59158,$$

$$\sin\frac{I}{2} = \sin 10^\circ\,36', \qquad 9\,.\,26470,$$

$$\mu = 2\,.\,123, \qquad 0\,.\,32688.$$

215. — *Troisième cas.* Passons à un cas un peu plus général. Cherchons, par exemple, la direction finale et la déviation d'un rayon réfracté par un nombre quelconque de surfaces planes, toutes ces réfractions étant supposées avoir lieu dans un même plan, ce qui exige que les intersections des surfaces soient parallèles.

Représentons, comme ci-dessus, par I l'inclinaison de la première surface sur la seconde; par I' celle de la seconde sur la troisième, etc. : nous regarderons ces angles I, I', etc., comme positifs lorsque les surfaces seront inclinées dans un certain sens, et comme négatifs lorsqu'elles le seront dans le sens contraire. Désignant de plus par δ, δ', δ'', etc., $\delta^{(n-1)}$, les déviations partielles du rayon à la première, seconde, troisième ...., n^{me} surface, les autres symboles restant les mêmes, la déviation totale sera

$$D = \delta + \delta' + \ldots\ \delta^{(n-1)}.$$

Maintenant nous avons, puisque dans chaque cas $\theta = 180°$:

$\sin\alpha = \mu \sin\rho$, $\alpha' = \rho + \mathrm{I}$, $\mu' \sin\rho' = \sin\alpha'$, $\delta = \alpha - \rho$,
$\sin\alpha' = \mu' \sin\rho'$, $\alpha'' = \rho' + \mathrm{I}'$, $\mu'' \sin\rho'' = \sin\alpha''$, $\delta' = \alpha' - \rho'$,
etc.;

d'où nous tirons (en représentant par n le nombre des surfaces)

$$\sin\rho = \frac{1}{\mu} \cdot \sin\alpha,$$

$$\sin\rho' = \frac{1}{\mu'} \sin(\mathrm{I} + \rho),$$

$$\sin\rho'' = \frac{1}{\mu''} \cdot \sin(\mathrm{I}' + \rho'),$$

. . . .

$$\sin\rho^{(n-1)} = \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \sin[\mathrm{I}^{(n-2)} + \rho^{(n-2)}].$$

Et la série des valeurs de ρ, ρ', etc., peut être continuée aussi loin que l'on voudra. Ces valeurs étant déterminées, celles de α, α', etc., le seront également par les équations

$$\alpha = \alpha, \quad \alpha' = \rho + \mathrm{I}, \quad \alpha'' = \rho' + \mathrm{I}', \quad \ldots,$$
$$\alpha^{(n-1)} = \rho^{(n-2)} + \mathrm{I}^{(n-2)};$$

et finalement

$$\mathrm{D} = [\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n-1)}] - [\rho + \rho' + \ldots + \rho^{(n-1)}]$$
$$= \alpha + [\mathrm{I} + \mathrm{I}' + \mathrm{I}'' \ldots + \mathrm{I}^{(n-2)}] - \rho^{(n-1)}.$$

Or

$$\mathrm{I} + \mathrm{I}' + \ldots + \mathrm{I}^{(n-2)}$$

est l'inclinaison de la première surface sur la dernière, ou l'angle (A) du prisme composé résultant de leur assemblage; de manière que l'on a généralement

$$\mathrm{D} = \alpha + \mathrm{A} - \rho^{(n-1)}. \quad \ldots \quad (h)$$

216. — Cherchons maintenant quelle doit être l'incidence d'un rayon sur un pareil système de surfaces, pour que la déviation totale soit un minimum.

Puisque $d\,D = 0$, et que I, I', etc., sont des constantes, nous devons avoir

$$d\,\alpha = d\,\rho^{(n-1)}.$$

Mais

$$\mu \sin \rho = \sin \alpha,$$
$$\mu' \sin \rho' = \sin (\rho + I),$$
etc.;

d'où

$$\mu\ d\rho\ \cos \rho = d\alpha \cos \alpha,$$
$$\mu'\ d\rho'\ \cos \rho' = d\rho \cos (\rho + I),$$
. . . . ,
$$\mu^{(n-1)}\, d\rho^{(n-1)} \cos \rho^{(n-1)} = d\rho^{(n-2)} \cos [\rho^{(n-2)} + I^{(n-2)}].$$

Faisant le produit de toutes ces équations,

$$\mu\,\mu' \ldots\ \mu^{(n-1)} \cos \rho \cos \rho' \ldots \cos \rho^{(n-1)}\ \frac{d\rho^{(n-1)}}{d\alpha}$$
$$= \cos \alpha\ .\ \cos (\rho + I) \ldots \cos [\rho^{(n-2)} + I^{(n-2)}],$$

ou simplement

$$\mu\mu' \ldots \mu^{(n-1)} \cos \rho \cos \rho' \ldots \cos \rho^{(n-1)} = \cos \alpha \cos \alpha' \ldots \cos \alpha^{(n-1)}. \quad (i)$$

Cette équation, combinée avec les relations déjà établies entre les valeurs successives de ρ et de α, fournit la solution du problème; mais les équations finales auxquelles on est conduit sont d'une grande complication et de degrés très élevés. Ainsi, dans le cas de trois réflexions seulement, l'équation finale en $\sin \rho$ ou $\sin \rho'$, etc., s'élève au seizième degré; et, quoique sa forme soit celle d'une équation du huitième, on ne peut cependant par aucune substitution abaisser davantage son degré. Le seul cas où elle prend une forme qui permette de la résoudre est celui de deux surfaces. L'équation (i), que l'on peut écrire généralement de la manière suivante,

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2\,\mu'^2 \ldots \mu^{(n)2}\,(1 - \sin^2 \rho)\ (1 - \sin^2 \rho') \ldots \text{etc.} \\ = (1 - \mu^2 \sin^2 \rho)\ (1 - \mu'^2 \sin^2 \rho') \ldots \text{etc.},\end{array}\right\}\ (j)$$

se réduit alors, en posant $\sin^2 \rho = x$ et $\sin^2 \rho' = y$, à

$$(\mu^2 \mu'^2 - 1) - \mu^2 (\mu'^2 - 1) x - \mu'^2 (\mu^2 - 1) y = 0.$$

En la combinant avec l'équation

$$\mu' \sin \rho' = \sin (\rho + I),$$

ou

$$(\mu'^2 y + x - \sin^2 I)^2 = 4 \mu'^2 \cos^2 I . x y,$$

elle donne une équation finale du quatrième degré, résoluble à la manière de celles du second, pour déterminer x ou y. Dans le cas particulier de $\mu \mu' = 1$, qui est celui où le rayon émerge dans le même milieu qu'il occupait avant sa première incidence, elle donne le même résultat que la méthode déjà employée pour ce cas. Quoiqu'il soit impossible de résoudre l'équation finale dans le cas général, l'équation (j) fournit sur la grandeur de la moindre déviation des données précieuses dans une foule de cas particuliers.

217. — *Quatrième cas.* Quand les plans de première et de deuxième réfraction sont à angles droits, quelles sont les relations qui résultent de cette condition ?

Nous avons alors

$$\theta = 90^\circ, \cos \theta = 0, \sin \theta = 1,$$

ce qui change l'équation générale [(B), 199] en

$$\sin \alpha = \mu \sin \rho,$$
$$\sin \alpha' = \mu' \sin \rho',$$
$$\sin \alpha' = \sin I . \sin \psi,$$
$$\cos \alpha' = \cos \rho . \cos I + \sin \rho . \sin I . \cos \psi.$$

Après avoir changé de place et élevé au carré les termes de cette dernière équation, il vient

$$\cos \alpha'^2 - 2 \cos \alpha' . \cos \rho . \cos I + \cos^2 \rho . \cos^2 I$$
$$= \sin^2 \rho . \sin^2 I (1 - \sin^2 \psi).$$

Remplaçant $\sin\psi$ par sa valeur $\frac{\sin\alpha'}{\sin I}$, déduite de la troisième équation, on obtient, après réduction,

$$\cos^2\alpha' \cdot \cos^2\rho - 2\cos\alpha'\cos\rho \cdot \cos I + \cos^2 I = 0 :$$

cette équation, étant un carré parfait, donne simplement

$$\cos\rho \cdot \cos\alpha' = \cos I. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

Celle-ci répond à l'équation

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha' = \cos I,$$

due à la même hypothèse, dans le cas de la réflexion (104). En effet, ce dernier cas étant compris dans celui de la réfraction, en posant $\mu = -1$ (art. 192), nous avons alors

$$\alpha = -\rho \text{ et } \cos\rho = \cos\alpha.$$

218. — *Coroll.* 1. Soient i et i' les inclinaisons sur la première et sur la deuxième surface de la partie du rayon qu'elles comprennent : l'on a

$$i = 90^\circ - \rho \text{ et } i' = 90^\circ - \alpha';$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (k),

$$\sin i \cdot \sin i' = \cos I,$$

c'est-à-dire que le produit des sinus des inclinaisons du rayon entre les deux surfaces sur chacune d'elles est égal au cosinus de l'inclinaison des deux surfaces. On peut encore exprimer autrement la même relation : en regardant le rayon comme provenant de l'intérieur du prisme, le produit des cosinus des angles d'incidence sur les deux surfaces égale le cosinus de leur inclinaison. Cette manière d'énoncer la loi comprend le cas de la réflexion.

219. — *Coroll.* 2. Nous avons aussi, dans le cas actuel,

$$\sin \rho = \frac{1}{\mu} \cdot \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha' = \sqrt{\frac{\mu^2 \sin^2 I - \sin^2 \alpha}{\mu^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\sin \rho' = \frac{1}{\mu'} \sqrt{\frac{\mu^2 \sin^2 I - \sin^2 \alpha}{\mu^2 - \sin^2 \alpha}},$$

$$\text{et } \cos D = \cos(\alpha - \rho) \cdot \cos(\alpha' - \rho');$$

de manière que, α étant donné, l'on peut assigner tous les autres éléments. La dernière équation correspond à celle qui donne la valeur de

$$\cos D = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha'$$

dans le cas de la réflexion.

—

§ VII. — *De la réfraction ordinaire sur des surfaces courbes ; des diacaustiques ou caustiques par réfraction.*

Recherche générale des foyers d'une surface de révolution donnée.

220. — La réfraction sur une surface courbe étant la même que sur le plan tangent au point d'incidence, si l'on connaît la nature de la surface, l'on peut, dans tous les cas, déterminer la route du rayon réfracté en combinant les lois de la réfraction à l'égard des plans avec les équations de la surface. Nous ne traiterons que le cas d'une surface de révolution ayant le point lumineux sur son axe.

Problème.

221. — Etant donné le point lumineux sur l'axe d'une surface réfractante, on demande où doit se trouver le foyer d'un anneau quelconque de la surface.

Soit C P la courbe (fig. 35), Q le point rayonnant, Q q N l'axe, P M une ordonnée, P N une normale et P q ou q P la direction du rayon réfracté, et par conséquent q le foyer de l'anneau décrit par la révolution de P.

Désignant alors par μ l'indice de réfraction, prenant Q pour l'origine des coordonnées, et posant

$$QM = x, \quad MP = y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad p = \frac{dy}{dx},$$

nous avons

$$\sin QPM = \frac{x}{r}, \quad \cos QPM = \frac{y}{r},$$

$$\sin NPM = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad \cos NPM = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Donc

$$\sin NPQ = \sin QPM \,.\, \cos NPM + \sin NPM \,.\, \cos QPM$$
$$= \frac{x + py}{r \,.\, \sqrt{1+p^2}}.$$

et par conséquent

$$\sin NPq = \frac{1}{\mu} \,.\, \sin NPQ = \frac{x + py}{\mu r \,.\, \sqrt{1+p^2}}.$$

Si l'on prend

$$Z = \sqrt{\mu^2 r^2 (1+p^2) - (x+py)^2},$$

$$\cos NPq = \frac{Z}{\mu r \sqrt{1+p^2}}. \quad \ldots \quad (a)$$

Et puisque

$$MPq = NPq + NPM,$$

l'on a

$$\sin MPq = \frac{x + py + pZ}{\mu r (1+p^2)}$$

$$\text{et} \quad \cos MPq = \frac{-p(x+py) + Z}{\mu r (1+p^2)};$$

d'où

$$\text{tang } MPq = \frac{\sin MPq}{\cos MPq} = \frac{x+py+pZ}{-p(x+py)+Z}.$$

Or

$$Mq = PM \,.\, \text{tang } MPq = y \,.\, \text{tang } MPq$$

$$= \frac{y\,[pZ+(x+py)]}{Z-p(x+py)}\,; \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

donc

$$Qq = x+y \,.\, \text{tang } MPq$$

$$= (x+py)\,\frac{px-y-Z}{p(x+py)-Z}. \quad \ldots \quad (c)$$

222. — *Coroll.* 1. Si nous appelons s l'arc CP de la courbe, nous aurons, puisque

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy = dx\,(x+py),$$

$$\left.\begin{aligned} Z &= \sqrt{\mu^2 r^2 \left[\frac{ds}{dx}\right]^2 - \left[\frac{r \,.\, dr}{dx}\right]^2} \\ &= r\sqrt{\mu \left[\frac{ds}{dx}\right]^2 - \left[\frac{dr}{dx}\right]^2} \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

223. — *Coroll.* 2. Si $\mu = -1$, ce qui change la réfraction en réflexion, l'on a

$$Z = \sqrt{r^2(1+p^2)-(x+py)^2} = y - px,$$

en écrivant, au lieu de r^2, sa valeur x^2+y^2.

La valeur générale de Qq trouvée plus haut se réduit alors à

$$Qq = 2 \,.\, \frac{(x+py)\,(px-y)}{2px-y(1-p^2)},$$

qui est la même que celle de l'art. 109, équat. (b).

224. — *Coroll.* 3. Si nous posons

$$P = \text{tang } M\,q\,P = \text{cotang } M\,P\,q = \frac{1}{\text{tang } M\,P\,q},$$

il viendra

$$P = \frac{-p\,(x+py)+Z}{x+py+pZ}; \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

et l'équation du rayon réfracté, exprimée en fonction des coordonnées X et Y, comptées à partir de l'origine Q, sera

$$Y - y = -P\,(X - x), \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

parce que les coordonnées Y sont dans le sens opposé à celles de la courbe.

225. — Dans le cas de rayons parallèles, ces expressions deviennent (en mettant $x + a$ à la place de x, et faisant a infini)

$$\left.\begin{aligned} Z &= a\sqrt{\mu^2(1+p^2)-1} \\ P &= \frac{-p+\sqrt{\mu^2(1+p^2)-1}}{1+p\sqrt{\mu^2(1+p^2)-1}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

$$A\,q = x + y \cdot \frac{1+p\sqrt{\mu^2(1+p^2)-1}}{\sqrt{\mu^2(1+p^2)-1}-p} \quad . \quad . \quad (h)$$

---

§ VIII. — *Des caustiques par réfraction, ou diacaustiques.*

Pour des rayons parallèles, la courbe est une section conique. — Caustique d'un plan réfractant.

226. — La théorie des diacaustiques est en tout point analogue à celle des catacaustiques que nous avons déjà ex-

posée. Pour trouver les coordonnées X et Y du point de la diacaustique correspondant au point P sur la courbe réfractante, nous n'avons qu'à regarder l'équation (f), et sa différentielle par rapport à x, y et p, comme subsistant simultanément, et nous obtiendrons ainsi en fonction de x et de y, de même que dans le cas de la réflexion, les équations nécessaires pour déterminer X et Y. Ces équations sont

$$X = x + \frac{P + p}{d P} d x, \quad Y = y - P \frac{P + p}{d P} d x. \quad . \quad (i)$$

Il n'y a de différence que dans les signes et dans la valeur de P, qui, au lieu de la formule (c), art. 110, est exprimée ici par la fonction plus compliquée (e), art. 224.

L'équation de la diacaustique s'obtiendra également en éliminant X et Y entre ces dernières équations.

227. — Il est évident d'ailleurs que, si nous faisons

$$M = \frac{P + p}{d P} d x,$$

comme dans la théorie des catacaustiques, et si nous dénotons par S la longueur de la caustique, et par f la ligne Py, nous aurons, de même que dans cette théorie,

$$f = M \sqrt{1 + P^2}, \quad - P = \frac{d Y}{d X},$$

et

$$d S = d f + d x \cdot \frac{1 - P p}{\sqrt{1 + P^2}}.$$

(Voyez les art. 139, 143, 144.)

Maintenant nous avons, en substituant à P sa valeur (e),

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1 + P^2} &= \frac{\mu r (1 + p^2)}{x + p y + p Z}, \\ 1 - P p &= \frac{(x + p y)(1 + p^2)}{x + p y + p Z}; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (k)$$

et par conséquent la valeur de dS devient

$$dS = df + \frac{(x + py)\,dx}{\mu\,r} = df + \frac{dr}{\mu},$$

parce que

$$(x + py)\,dx = r\,dr.$$

Intégrant ensuite

$$S = \text{const} + f + \frac{r}{\mu}:$$

ainsi nous trouvons finalement (fig. 34)

$$\text{arc } Fy = (CF - Py) + \frac{1}{\mu}(QC - QP). \quad . \quad (l)$$

228. — Dans le cas de la réflexion, $\mu = -1$; mais, en même temps, le signe de f est négatif, parce qu'alors le rayon réfléchi se trouve du même côté du point d'incidence que le rayon incident : ainsi deux termes de la formule changent de signe à la fois, et cette expression devient celle de l'art. 144.

229. — Dans le cas de rayons parallèles, nous devons faire usage de la valeur de P trouvée à l'art. 225, équations (g). Posant

$$q = \frac{dp}{dx},$$

et effectuant les opérations, on trouve alors

$$\left.\begin{aligned} X &= x - \frac{1}{P}\cdot\frac{\mu^2(1+p^2)-1}{\mu^2 q} \\ Y &= y + \frac{\mu^2(1+p^2)-1}{\mu^2 q}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (m)$$

230. — *Corollaire.* En supposant $\mu = \infty$, c'est-à-dire le pouvoir réfringent infini, le rayon réfracté coïncidera avec la normale, et la caustique avec la développée : il est évident que les expressions (m), quand $\mu = \infty$, deviennent

identiques avec les valeurs connues des coordonnées de la développée.

231. Si les rayons incidents sur la courbe réfractante ne vont pas en divergeant d'un même point, mais qu'ils soient tous tangents à une courbe V V' V'' (fig. 35), nous devrons poser $x - a$ pour x dans la valeur de P [éq. (e), art. 224], et fixer l'origine des coordonnées en A en faisant $AQ = a$. Si nous regardons alors a comme variant suivant une certaine loi (ou $x - a$ comme une fonction de x), et que nous prenions la différentielle de P dans cette hypothèse, les équations (i) continueront à subsister, et suffiront pour déterminer la caustique.

Problème.

232. — Etant donnés le point rayonnant et l'indice de réfraction, déterminer la nature de la surface courbe qui réfracterait tous les rayons en un même point.

Il faut ici chercher la relation entre x et y, en supposant Qq invariable. Soit $Qq = c$: nous aurons

$$c = (x + py)\frac{px - y - Z}{p(x + py) - Z};$$

équation dans laquelle

$$Z = \sqrt{\mu^2(x^2 + y^2)(1 + p^2) - (x + py)^2}.$$

Celle-ci donne

$$(x + py)[p(x - c) - y] = Z(x - c + py);$$

carrant des deux parts, après avoir remplacé Z par sa valeur,

$$(x + py)^2 \left\{[p(x - c) - y]^2 + (x - c + py)^2\right\}$$
$$= (x - c + py)^2 \cdot \mu^2 (x^2 + y^2)(1 + p^2).$$

En effectuant dans le premier membre les opérations in-

diquées, l'équation devient entièrement divisible par $1+p^2$, et se réduit à

$$(x+py)^2[y^2+(x-c)^2]=\mu^2(x-c+py)^2(y^2+x^2),$$

qui devient, en y écrivant au lieu de p sa valeur $\frac{dy}{dx}$, multipliant par dx^2, et extrayant la racine carrée,

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mu\cdot\frac{(x-c)\,dx+y\,dy}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}};$$

intégrant ensuite (chaque membre étant une différentielle exacte)

$$\sqrt{x^2+y^2}=b+\mu\sqrt{(x-c)^2+y^2}; \quad (n)$$

équation de la courbe cherchée, qui est en général du quatrième degré.

233. — *Coroll.* 1. Du point Q (fig. 36) comme centre, avec un rayon QA pris arbitrairement, décrivons un cercle ABDE : soit CP la courbe réfractante, et $QA=b$, nous aurons

$$QP=\sqrt{x^2+y^2}, \quad Pq=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

et la nature de la courbe sera exprimée par la propriété suivante :

$$BP=\mu\cdot Pq, \quad \text{ou } BP:Pq::\mu:1.$$

234. — *Coroll.* 2. Si $b=0$, c'est-à-dire si le cercle ABE est infiniment petit, l'on a

$$QP:Pq::\mu:1;$$

ce qui est une propriété du cercle bien connue.

L'équation (n) donne alors simplement

$$x^2+y^2=\mu^2[(x-c)^2+y^2].$$

Si nous changeons dans celle-ci l'origine des coordonnées, en substituant à x

$$x + \frac{\mu^2}{\mu^2 - 1} c,$$

elle se transformera en

$$y^2 = \left[\frac{\mu c}{\mu^2 - 1}\right] - x^2.$$

Le rayon du cercle est donc égal à

$$\frac{\mu}{\mu^2 - 1} \cdot Q q,$$

et la distance du centre au point lumineux est

$$\frac{\mu^2}{\mu^2 - 1} \cdot Q q.$$

Supposons maintenant un cercle HPC, dont le centre soit en E (fig. 37), et deux points Q, q, tels que

$$QE = \mu \times EC, \text{ et } QC : Cq :: \mu : 1.$$

Si les rayons divergent alors du point Q, et tombent sur la surface PH au-delà du centre, ils iront tous diverger du point q après leur réfraction par le milieu M.

235. — *Coroll.* 3. Si $\mu = -1$, après l'évanouissement des radicaux, l'équation (n) entre x et y ne monte qu'au second degré, et appartient par conséquent à une section conique : on trouvera alors, après réduction,

$$y^2 = \left[1 - \frac{c^2}{b^2}\right] \left[\frac{b}{2}\right]^2 = \left[1 - \frac{c^2}{b^2}\right] \left[x - \frac{c}{2}\right]^2;$$

ce qui fait voir que le point rayonnant Q occupe l'un des foyers, et q l'autre ; résultat semblable à celui que nous avions déjà obtenu par une autre méthode d'intégration.

236. — *Coroll.* 4. — Quand Q est infiniment éloigné, et que les rayons sont parallèles, il faut transporter l'origine

des coordonnées du point Q au point q, en changeant x en $c - x$, et supposer ensuite c infini : il vient d'abord

$$\sqrt{c^2 - 2cx + x^2 + y^2} = b + \mu \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Développant le premier membre en série descendante,

$$(c - b) - x + \frac{x^2 + y^2}{2c^2} + \text{etc.} = \mu \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Soit $c - b = h$: puisque b est arbitraire, h l'est également, et peut avoir une valeur infinie. Ainsi, lorsque c, croissant de plus en plus, devient infini, l'équation précédente prend la forme

$$h - x = \mu \sqrt{x^2 + y^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (o)$$

Soit C P une section conique, q son foyer, A B sa directrice,

$$q\,\mathrm{M} = x, \quad \mathrm{P\,M} = y :$$

Q P est $h - x$, en supposant $q\,\mathrm{A} = h$, et l'équation (o) exprime, comme on le voit, cette propriété des sections coniques, que Q P : P q dans un rapport constant ($\mu : 1$).

237. — *Coroll.* 5. La courbe est une ellipse quand Q P > P q, c'est-à-dire quand le rayon passe d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense ; et une hyperbole dans le cas contraire.

Si Q P = P q, la courbe est une parabole : dans ce cas, $\mu = 1$, et les rayons convergent vers un foyer infiniment éloigné, c'est-à-dire demeurent parallèles.

238. — Pour donner un exemple de la recherche d'une diacaustique au moyen des équations générales exposées plus haut, prenons un plan pour surface réfractante, et supposons l'origine des coordonnées au point rayonnant, et l'axe des x perpendiculaire au plan réfractant A C B (fig. 39 et 40) : nous aurons alors

$$x = \text{constante} = \mathrm{QC} = a,\ p = \frac{dy}{dx} = \infty ;$$

d'où

$$\mathrm{Z} = p \sqrt{(\mu^2 - 1)y^2 + \mu^2 a^2},$$

$$\mathrm{P} = - \frac{y}{\sqrt{(\mu^2 - 1)y^2 + \mu^2 a^2}},$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,x} = - \frac{\mu^2 a^2 p}{\sqrt{(\mu^2 - 1)y^2 + \mu^2 a^2}}.$$

Par la substitution de ces valeurs dans les équations (i), l'on trouve

$$\mu^2 a^2 (a - \mathrm{X}) = [(\mu^2 - 1)y^2 + \mu^2 a^2]^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathrm{Y} = \frac{1 - \mu^2}{\mu^2} \cdot \frac{y^3}{a^2},$$

éliminant y entre ces deux équations :

$$\left[\frac{a - \mathrm{X}}{\mu\, a}\right]^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{\sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \cdot \frac{\mathrm{Y}}{a}\right]^{\frac{2}{3}} = 1,$$

équation de la caustique et de la développée d'une section conique dont le centre est C et le foyer Q.

Si μ surpasse l'unité, ou si la réfraction se fait en passant d'un milieu plus dense dans un milieu plus rare, la section conique est une ellipse (voy. fig. 39); et une hyperbole dans le cas contraire (fig. 40).

---

§ IX. — *Foyers des rayons centraux pour des surfaces sphériques.*

Définition de la courbure. — Proximité. — Distance focale. — Longueur focale. — Pouvoir. — Expressions générales de la distance focale d'un anneau quelconque d'une surface sphérique. — Foyer des rayons centraux. — Foyer des rayons parallèles. — Équation fondamentale pour déterminer les foyers des rayons centraux. — Expression générale du pouvoir d'une surface sphérique. — Formules fondamentales pour les foyers des rayons centraux dans le cas de la réflexion. — Recherche



du foyer central d'un système de surfaces sphériques. — Foyer d'un système de surfaces sphériques qui se suivent immédiatement. — Formules fondamentales pour les foyers centraux d'un système quelconque de surfaces sphériques. — Définition et classification des lentilles ; — comment on les distingue algébriquement. — Foyer d'une seule lentille. — Equations fondamentales. — Pouvoir d'une lentille. — Foyers réels et virtuels. — Pouvoirs positifs et négatifs. — Les foyers conjugués se meuvent dans la même direction. — Foyers centraux d'un système de lentilles minces en contact. — Addition de pouvoirs. Le pouvoir d'un système de lentilles est la somme des pouvoirs de chaque lentille en particulier. — Expression du pouvoir d'un système de surfaces sphériques. — Foyer d'un système de surfaces séparées par des intervalles finis, mais très petits. — Cas d'une seule lentille d'une épaisseur finie quoique très petite. — Foyer d'une lentille d'une épaisseur quelconque. — Foyers d'une sphère. — Foyers d'un hémisphère. — Foyer d'un segment sphérique quand la face convexe regarde les rayons incidents ; quand c'est la face plane. — Foyer d'une calotte sphérique dont la courbure extérieure égale la courbure intérieure.

239. — La *courbure* d'une surface sphérique est réciproque à son rayon, c'est-à-dire que c'est une fraction dont le numérateur est l'unité et le dénominateur un nombre égal à celui des unités de mesure linéaire contenues dans le rayon.

240. — La *proximité* d'un point par rapport à un autre est en raison inverse de leur distance mutuelle : c'est donc le quotient de l'unité divisée par le nombre des unités de longueur qui mesure cette distance.

241. — La *distance focale* d'une surface sphérique est la distance du sommet au point vers lequel les rayons convergent, ou d'où ils divergent après réfraction ou réflexion.

242. — *La distance focale principale ou la longueur focale* est la distance du sommet au foyer des rayons *parallèles et centraux*.

243. — Le *pouvoir* d'une surface est réciproque à sa *longueur focale*.

Problème.

244. — Trouver, pour une surface sphérique, le foyer

des rayons centraux réfractés une seule fois par cette surface.

Nommant a la distance du foyer des rayons incidents Q (fig. 41) au centre E, nous avons

$$(a-x)^2+y^2=r^2,\ p=\frac{a-x}{y},$$

$$1+p^2=\frac{r^2}{y^2},\ x+py=a.$$

Ces valeurs, étant substituées dans les expressions générales de l'art. 221, donnent

$$\left.\begin{aligned} y\,\mathrm{Z} &= \sqrt{\mu^2 r^2 x^2+(\mu^2 r^2-a^2)\,y^2} \\ \mathrm{Q}q &= a\left[1-\frac{r^2}{a\,(a-x)-y\,\mathrm{Z}}\right] \\ \mathrm{C}\,q &= r\left[1-\frac{r\,a}{a\,(a-x)-y\,\mathrm{Z}}\right] \end{aligned}\right\}\ .\ .\ (a)$$

Ces valeurs de Q q et de C q renferment la solution rigoureuse du problème, quelle que soit l'*amplitude* (y) de l'anneau dont le foyer est q ; et dans la suite nous y aurons recours : mais comme il ne s'agit maintenant que de rayons centraux, nous ferons $y=0$, ce qui nous donnera

$$x=a-r,\ y\,\mathrm{Z}=\mu\,r\,x=\mu\,r\,(a-r),$$

$$\mathrm{Q}\,q=a\,.\,\frac{(a-r)\,(1-\mu)}{a-\mu\,a+\mu\,r},\ \mathrm{C}\,q=\frac{\mu\,r\,(r-a)}{a-\mu\,a+\mu\,r}.\ (b)$$

245. — *Coroll.* 1. Cette valeur de Cq est la distance focale pour les rayons centraux. Q C étant égal à $a-r$, elle fournit la proportion suivante :

$$\mu\,.\,\mathrm{QC}-\mathrm{QE}:\mu\,.\,\mathrm{QC}::\mathrm{CE}:\mathrm{C}q.\ \ .\ \ .\ (c)$$

246. — *Coroll.* 2. Si l'on suppose le foyer des rayons incidents à une distance infinie , ou $a=\infty$, F à la place de q

pour les rayons centraux ; cette hypothèse fera du point F le foyer principal, et il viendra

$$\left.\begin{array}{l} CF = \frac{\mu r}{\mu - 1}, \text{ ou } CE : CF :: \mu - 1 : \mu \\ CE : EF :: \mu - 1 : 1, \text{ et } CF : FE :: \mu : 1 \end{array}\right\}. \quad (d)$$

247. — Nous donnerons à ces résultats une forme plus appropriée à l'usage que nous devons en faire dans la suite, en adoptant une autre notation.

Soient donc

$R = \frac{1}{r}$ = la courbure de la surface, les valeurs positives de r et de R correspondant au cas où le centre E se trouve à droite du sommet C, ou dans la direction des rayons incidents ;

$D = \frac{1}{QC}$ (fig. 42) = la proximité du foyer des rayons incidents par rapport à la surface, D étant regardé comme positif quand Q se trouve à la droite de C, comme dans la fig. 42, et comme négatif quand il est à sa gauche, comme dans la fig. 41. Alors, puisque $QE = a$, et que, dans l'analyse précédente, a est regardé comme positif lorsque Q est à gauche du point E, nous devons avoir (fig. 42),

$$QE = -a, \text{ et } QC = QE + EC = r - a ;$$

de manière que

$$D = \frac{1}{r - a}, \quad a = \frac{1}{R} - \frac{1}{D}.$$

Soient aussi $m = \frac{1}{\mu}$;

$F = \frac{1}{CF}$ = le pouvoir de la surface ;

$f = \frac{1}{Cq}$ = la proximité du foyer des rayons réfractés par rapport à la surface.

Les valeurs positives de F et de f, ainsi que de D et de R, sont relatives à la situation des points F, f, Q, E, par rapport à la droite de C ou à la direction de la lumière incidente : ce qui revient à regarder toutes les données comme positives dans le cas où les rayons incidents *convergent* en tombant sur une surface *convexe*, et passent dans un milieu *plus dense*. Nous aurons alors

$$r = \frac{1}{R},\ r - a = \frac{1}{D},\ a = \frac{1}{R} - \frac{1}{D},\ \mu = \frac{1}{m}.$$

Mais l'équation (b) donne

$$\frac{1}{Cq} = \frac{a + \mu(r - a)}{\mu r (r - a)},$$

et nous trouverons, en substituant,

$$f = (1 - m)\,R + m\,D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Cette équation comprend toute la théorie des foyers des rayons centraux pour des surfaces sphériques ; et peut être regardée comme fondamentale.

248. — Quand les rayons sont parallèles, on a $D = 0$, soit que les rayons tombent de gauche à droite ou de droite à gauche : dans les deux cas, f a la même valeur, c'est-à-dire $(1 - m)\,R$, ainsi que la principale distance focale F donnée par l'équation

$$F = (1 - m)\,R; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f)$$

ce qui fait voir, en outre, que le pouvoir d'une surface sphérique est en raison directe de sa courbure.

249. — On conclut aussi des équations (e) et (f),

$$f = F + m\,D. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (g)$$

250. — Dans le cas de la réflexion,

$$\mu = -1, \text{ ou } m = -1,$$

et ces équations deviennent

$$F = 2R, \ f = 2R - D, \ f = F - D. \quad . \quad . \quad (h)$$

Telles sont les expressions des foyers centraux dans le cas d'une seule surface.

Considérons maintenant un système quelconque de surfaces sphériques.

Problème.

251. — Trouver le foyer central d'un système quelconque de surfaces sphériques.

Soient C′, C″, C‴, etc., ces surfaces; Q′ le foyer des rayons incidents sur C′; Q″ celui des rayons réfractés ou des rayons incidents sur C″, et ainsi de suite. Nommons aussi R′, R″, etc., les rayons de la première, de la deuxième, etc., surface; μ', μ'', etc., l'indice de réfraction, ou $\frac{\text{sin d'inc.}}{\text{sin de réfr.}}$ de chaque surface par rapport à celle qui la précède immédiatement; faisons

$$m' = \frac{1}{\mu'}, \quad m'' = \frac{1}{\mu''}, \quad \text{etc.}$$

Soient aussi

$$D' = \frac{1}{C'Q'}, \quad D'' = \frac{1}{C''Q''}, \quad \text{etc.},$$

et posons de plus

$$C'C'' = t', \quad C''C''' = t'', \quad \text{etc.},$$

t', t'', etc., étant considérés comme positifs lorsque les points C″, C‴, etc., sont respectivement à la droite de C′, C″, etc., ou dans la direction de la lumière incidente.

Soient encore

$$\frac{1}{C'Q''} = f', \quad \frac{1}{C''Q'''} = f'', \quad \text{etc.},$$

$$F' = (1 - m')\,R', \quad F'' = (1 - m'')\,R'', \quad \text{etc.}$$

Nous aurons, en vertu de l'art. 249,

$$f' = F' + m'D', \quad f'' = F'' + m''D''; \quad . \quad . \quad (i)$$

mais nous avons aussi

$$C'Q' = \frac{1}{D'},\ C''Q'' = \frac{1}{D''} = C'Q'' - C'C'' = \frac{1}{f'} - t',$$

et ainsi de suite; de manière que l'on a de plus les relations

$$D' = D,\ D'' = \frac{f'}{1 - f'\,t'},\ D''' = \frac{f''}{1 - f''\,t''}; \quad (j)$$

et, substituant ces valeurs de D'', D''', etc., dans les équations (i), en introduisant dans chacune les valeurs de f', f'', etc., obtenues à l'aide des équations qui la précèdent, nous trouverons des valeurs explicites de f', f'', etc., jusqu'à la fin.

252. — Le système des équations (i) et (j) contient la solution générale du problème, quels que soient les intervalles entre les surfaces.

En opérant cependant sur les valeurs générales de t', t'', etc., l'on tombera sur des expressions excessivement compliquées, sans qu'il y ait moyen de les simplifier, la complication provenant du sujet même, et non de la manière de le traiter.

On peut consulter sur ce sujet le mémoire de Lagrange, *Sur la théorie des lunettes*, Acad. de Berlin, 1778. Nous nous contenterons d'en discuter ici les cas principaux.

Problème.

253. — Trouver la distance focale d'un système de surfaces sphériques qui se suivent immédiatement.

Dans ce cas, t', t'', etc., s'évanouissent, et les équations (i) et (j) deviennent simplement

$$D' = D',\ D'' = f',\ D''' = f'',\ \text{etc.},$$

$$f' = F' + m'D',\ f'' = F'' + m''D'',\ \text{etc.};$$

d'où nous tirons, par substitution,

$$f'' = F'' + m'' F' + m' m'' D',$$

$$f''' = F''' + m''' F'' + m''' m'' F' + m''' m'' m' D';$$

série de valeurs que l'on peut continuer à volonté.

254. — *Coroll.* 1. Soit n le nombre des surfaces, et M' l'indice *absolu* de réfraction (μ') du premier milieu par rapport au vide; $M'' = \mu' \mu''$ celui du second milieu aussi par rapport au vide, et ainsi de suite; μ', μ'', n'étant que les indices de réfraction *relatifs* de chaque milieu par rapport à celui qui le précède.

Nous aurons ainsi

$$M^{(n)} f^{(n)} = D' + M' F' + M'' F'' + \dots + M^{(n)} F^{(n)}. \quad (k)$$

255. — *Coroll.* 2. Pour des rayons parallèles, nous avons $D' = 0$, quelle que soit la direction des rayons incidents; et la principale longueur focale du système, que nous appellerons $\frac{1}{\varphi^{(n)}}$, est donnée par l'équation

$$M^{(n)} \varphi^{(n)} = M' F' + M'' F'' + \dots + M^{(n)} F^{(n)}. \quad (l)$$

256. — *Coroll.* 3. Il résulte de là que $\varphi^{(n)}$, qui représente le *pouvoir du système*, ou sa valeur réciproque (la principale longueur focale), étant déterminé au moyen de la dernière équation, le foyer d'un nombre quelconque de rayons convergents ou divergents se déduira sur-le-champ de l'équation

$$M^{(n)} f^{(n)} = M^{(n)} \varphi^{(n)} + D'.$$

257. — Nous modifierons cependant notre notation pour la rendre plus simple et plus commode : réservant les lettres accentuées pour les surfaces considérées individuellement; nous les emploierons sans accent quand il s'agira de l'action des surfaces disposées en système.

Ainsi F', F'', ... $F^{(n)}$, représentant les pouvoirs individuels des surfaces, F sans accent désignera le pouvoir de tout le système. Par suite de cette convention, il sera indifférent d'écrire D' ou D : avec l'accent, il se rapportera à l'incidence sur la première surface ; sans accent, il exprimera la proximité du foyer des rayons incidents, au sommet de tout le système.

Nous pouvons de même employer $M^{(n)}$ sans accent, en regardant l'indice de réfraction de tout le système comme celui d'un rayon qui passerait dans le dernier milieu en ne se réfractant qu'une fois.

Ces conventions établies, les équations (k) et (l) deviennent

$$M F = M' F' + M'' F'' + ... + M^{(n)} F^{(n)} . \quad (m)$$

$$M f = M F + D, \quad M (F - f) + D = 0. \quad (n)$$

258. — Si tout le système se trouvait dans le vide, ou si la dernière réfraction se faisait dans le vide, nous aurions

$$M = 1 = M^{(n)},$$

et ces équations se changeraient en

$$\left. \begin{array}{l} F = M' F' + M'' F'' + ... + M^{(n)} F^{(n)}, \\ f = F + D. \end{array} \right\} \quad (o)$$

259. — *Définitions*. Une *lentille* est, en optique, la portion d'un milieu dirimant comprise entre deux surfaces de révolution dont les axes coïncident. Si les surfaces ne se rencontrent point, elles ne peuvent embrasser un espace fini, et l'on est obligé d'ajouter, pour clore le milieu, une surface cylindrique dont l'axe coïncide avec celui des surfaces.

L'*axe* de la lentille est l'axe commun de toutes les surfaces qui l'enveloppent.

On distingue les lentilles, d'après la nature de leurs surfaces, en

Bi-convexes, quand elles sont formées par deux surfaces convexes (fig. 44);

Plano-convexes, quand une des surfaces est plane et l'autre convexe (fig. 45);

Concavo-convexes (fig. 46);

Bi-concaves (fig. 47);

Plano-concaves (fig. 48);

Ménisques (fig. 49), quand la concavité est moindre que la convexité.

On les divise aussi en *sphériques*, quand les surfaces sont des segments de sphère, et en *conoïdales*, quand leur forme est celle d'un segment d'ellipsoïde, d'hyperboloïde, etc.

260. — Ces diverses espèces de lentilles se distinguent algébriquement par les équations de leurs surfaces et par les signes de leurs rayons de courbure. Dans le cas de lentilles sphériques, cas auquel nous donnerons une attention spéciale, en supposant positif le rayon de courbure de la surface qui a sa convexité tournée vers la *gauche*, c'est-à-dire vers les rayons incidents, et négatif celui de la surface dont la convexité regarde la droite ou le côté opposé à ces mêmes rayons, nous trouverons pour toutes ces espèces les caractères suivants :

Ménisque concavo-convexe.	les deux rayons +, comme dans les fig. 46, 49, *a*; les deux rayons —, comme dans les fig. 46, 49, *b*.
Plano-convexe.	le rayon de la première surface +, celui de la seconde infini, fig. 45, *b*; le rayon de la première surface infini, celui de la seconde —, fig. 45, *a*.

Plano-concave . le rayon de la première surface —, celui de la seconde ∞, fig. 48, *b*; le rayon de la première surface ∞, celui de la seconde +, fig. 48, *a*.

Bi-convexe . . le rayon de la première surface +, celui de la seconde —, fig. 44.

Bi-concave . . le rayon de la première surface —, celui de la seconde +, fig. 47.

On suppose que les rayons vont toujours de gauche à droite.

Une *lentille composée* est un assemblage de lentilles juxtaposées l'une derrière l'autre.

On appelle *lentille aplanétique* celle qui réfracte tous les rayons en un même foyer.

Problème.

261. — Trouver le pouvoir et les foyers d'une seule lentille dans le vide.

Soient R′ et R″ les courbures respectives de sa première et de sa seconde surface, μ l'indice de réfraction du milieu dont elle est faite, $m = \frac{1}{\mu}$ F, son pouvoir : nous aurons alors, puisque la dernière réfraction se fait dans le vide,

$$F = \mu F' + F'', \; f = F + D;$$

mais

$$F' = (1 - m') R', \text{ et } F'' = (1 - m'') R''.$$

Et comme

$$m' = \frac{1}{\mu}, \text{ et } m'' = \mu,$$

ces équations deviennent

$$F' = \frac{1}{\mu}(\mu - 1)\ R',\ \text{et}\ F'' = -(\mu - 1)\ R'';$$

de manière que les foyers de la lentille sont déterminés finalement par les équations

$$\left.\begin{array}{l} F = (\mu - 1)\ (R' - R''), \\ f = F + D. \end{array}\right\} \ \ldots\ (p)$$

262. — *Coroll.* 1. Le pouvoir d'une lentille est proportionnel à la différence des courbures des deux surfaces pour un ménisque ou pour une lentille concavo-convexe, et à leur somme pour une lentille bi-convexe ou bi-concave.

Quant aux lentilles plano-convexes ou plano-concaves, leur pouvoir est simplement proportionnel à la courbure de la surface convexe ou concave.

263. — *Coroll.* 2. Dans les lentilles bi-convexes, R′ est positif et R″ négatif; de sorte que, si μ surpasse l'unité, F est positif, c'est-à-dire que les rayons convergent vers un foyer derrière la lentille. Dans les lentilles plano-convexes, $R'' = 0$ et R′ est positif, ou $R' = 0$ et R″ est négatif (260); d'où il suit que F est positif et que les rayons convergent dans les deux cas. Il en est de même des ménisques où R′ est également positif, et où R″, quoique positif, est moindre que R′ (fig. 49).

Dans ces différents cas, le foyer est dit *réel*, parce que les rayons s'y rencontrent effectivement. Le contraire a lieu à l'égard des lentilles bi concaves, plano-concaves ou concavo-concaves; le foyer se trouve du côté opposé, c'est-à-dire du côté des rayons incidents, et les rayons parallèles divergent après leur réfraction, à partir de ce point.

Dans ce cas donc ils ne se rencontrent jamais, et ce foyer est dit *foyer virtuel*.

264. — *Coroll.* 3. Si $\mu < 1$, c'est-à-dire si la lentille est faite d'une matière plus rare que le milieu ambiant (qui ne doit point être le vide, pourvu que tout le système s'y trouve plongé), $\mu - 1$ est négatif, et toutes les propriétés des lentilles convexes appartiennent alors aux lentilles concaves : celles-ci ont alors un foyer réel, tandis que celui des autres n'est que virtuel.

265. — *Coroll.* 4. Les lentilles bi-convexes, plano-convexes ou ménisques, formées d'une matière plus dense que le milieu qui les environne, ont un pouvoir positif : le contraire a lieu si leur matière est plus rare.

266. — *Coroll.* 5. Le foyer des rayons parallèles est toujours à la même distance, quelle que soit la face de la lentille qui reçoit les rayons. En effet, si l'on retourne la lentille, R' devient R'', et réciproquement; mais, comme elles changent de signe en même temps, la valeur de F n'éprouve aucune altération.

267. — *Coroll.* 6. L'équation

$$f = F + D$$

donne

$$df = dD;$$

ce qui fait voir que le foyer des rayons incidents et celui des rayons réfractés se meuvent toujours dans la même direction, en supposant que le premier se déplace le long de l'axe, et, en outre, que leurs proximités à l'égard de la lentille croissent ou décroissent par degrés égaux.

Problème.

268. — Déterminer les foyers centraux d'un système de lentilles infiniment minces qui se touchent.

Le problème général d'un système de surfaces sphériques

comprend celui-ci comme cas particulier, car l'on peut considérer la face postérieure de la première lentille comme formant une lentille vide avec la face antérieure de la seconde, et ainsi de suite : ainsi l'on peut substituer aux lentilles un système de surfaces sphériques qui se touchent dans toute leur étendue. Les indices de réfraction des milieux sont alternativement M et 1; et, si l'on désigne par μ', μ'', μ''', etc., les indices de réfraction des lentilles, il vient

$$M = 1,\ M' = \mu',\ M'' = 1,\ M''' = \mu'',\ M^{\text{IV}} = 1,\ \text{etc.}$$

Le pouvoir résultant F aura alors [258 (o)] pour expression

$$F = \mu' F' + F'' + \mu'' F''' + F^{\text{IV}} + \mu''' F^{\text{V}} + F^{\text{VI}} +,\ \text{etc.};$$

mais

$$F' = (1 - m')\,R' = \frac{1}{\mu'}\,(\mu' - 1)\,R',$$

$$F'' = (1 - m'')\,R'' = (1 - \mu')\,R'',$$

à cause de $m' = \frac{1}{\mu}$ et de $m'' = \mu'$. Ainsi

$$\mu' F' + F'' = (\mu' - 1)\,(R' - R''),$$

et semblablement

$$\mu'' F''' + F^{\text{IV}} = (\mu'' - 1)\,(R''' - R^{\text{IV}}),\ \text{etc.}:$$

de manière que l'on obtient à la fin

$$F = (\mu' - 1)\,(R' - R'') + (\mu'' - 1)\,(R''' - R^{\text{IV}}) +,\ \text{etc.}$$

D'après l'art. 261, chaque terme de cette équation représente le pouvoir d'une des lentilles du système : ainsi, en désignant par L', L'', L''', etc., les pouvoirs individuels de chaque lentille, et par L celui de tout le système (conformément à la notation que nous avons adoptée), il viendra

$$L = L' + L'' + L''' +,\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

Ce qui nous apprend que le pouvoir d'un système de lentilles est la somme des pouvoirs individuels des lentilles qui le

composent. Le mot *somme* est pris ici dans son acception algébrique, quand il y a des lentilles dont le pouvoir est négatif. D'ailleurs on voit aisément que l'on a aussi

$$f = L + D,$$

comme dans le cas d'une seule lentille.

269. — Réciproquement, l'on peut regarder un système de surfaces sphériques servant d'enveloppes à des milieux contigus (une lentille de verre pleine d'eau, par exemple) comme formant des lentilles distinctes, en concevant la concavité d'un milieu et la convexité de celui qui le suit immédiatement comme séparées par une lame infiniment mince de vide ou de tout autre milieu dont les faces auraient respectivement la même courbure que celles des lentilles qu'elles touchent (fig. 50). Par ce moyen, l'on peut, à un nombre quelconque n de milieux dont les surfaces sont en contact dans toute leur étendue, substituer par la pensée un système équivalent de $2n - 1$ lentilles, alternativement pleines et vides ou sans pouvoir. Cette manière d'envisager la question est fréquemment employée.

Elle conduit de plus à ce résultat, que *le pouvoir d'un système quelconque de surfaces sphériques placées dans le vide est la somme des pouvoirs de toutes les lentilles dont on peut le concevoir composé, chacune étant considérée comme agissant seule dans le vide.*

270. — Reprenons maintenant le cas de surfaces séparées par des intervalles finis, et cherchons d'abord les foyers d'un système de surfaces assez rapprochées pour que les carrés des intervalles qui les séparent soient négligeables. Les équations (j), art. 251, deviennent alors simplement

$$D' = D,\ D'' = f' + f'^2 t',\ D''' = f'' + f''^2 t'', \text{ etc.};$$

puis, en reportant ces valeurs dans les équations (i) et conservant la notation de l'art. 257, on trouve

$$Mf = M^{(n)} f^{(n)} = M' F' + M'' F'' + \ldots + M^{(n)} F^{(n)} + D + M' f'^2 t' + M'' f''^2 t'' + \ldots + M^{(n-1)} f^{(n-1)2} t^{(n-1)}.$$

On observera, à l'égard de cette équation, que

$$f' = F' + m' D,\ f'' = F'' + m'' F' + m' m'' D', \text{ etc.};$$

et les valeurs de f', f'', etc., ainsi exprimées, y étant substituées, il viendra

$$\left.\begin{array}{l} Mf = M' F' + M'' F'' + M''' F''' +, \text{ etc.}, + D + \\ \quad M'(F' + m'D)^2 t' + M''(F'' + m'' F' + m' m'' D)^2 t'' +, \text{etc.} \end{array}\right\} (r)$$

271. — *Corollaire.* Dans le cas de deux surfaces, en supposant $M = 1$, c'est-à-dire une seule lentille dans le vide, cette équation donne

$$f = (\mu - 1)(R' - R'') + D + \frac{1}{\mu}[(\mu - 1) R' + D]^2 t. \quad (s)$$

Quand les rayons sont parallèles, ceci devient

$$F = (\mu - 1)(R' - R'') + \frac{(\mu - 1)^2}{\mu} R'^2 t, \ . \ . \quad (t)$$

t remplaçant ici t', intervalle entre les surfaces, ou *épaisseur totale* de la lentille.

Problème.

272. — Déterminer les foyers d'une lentille dont l'épaisseur t est trop considérable pour qu'une puissance quelconque de t puisse être négligée.

Nous devons prendre ici les formules rigoureuses

$$D' = D,\ D'' = \frac{f}{1 - f' t},\ f' = (1 - m') R' + m' D,$$
$$\text{et } f'' = (1 - m'') R'' + m'' D''.$$

On trouvera, à l'aide de la dernière équation, par substitution, et en se rappelant que $m' = \frac{1}{\mu} = m$ et que $m'' = \mu$,

$$f = f'' = \frac{(\mu-1)(R'-R'') + D + \frac{\mu-1}{\mu}[(\mu-1)R' + D]R''t}{1 - \frac{1}{\mu}[(\mu-1)R' + D]\,t} \; ; \quad (u)$$

et pour des rayons parallèles,

$$F = \frac{\mu^2(\mu-1)\ (R'-R'') + (\mu-1)^2 R' R'' t}{\mu - t(\mu-1)R'} \; . \quad (v)$$

273. — *Exemple* 1. Déterminer les foyers d'une sphère. Dans ce cas,

$$R'' = -R' = -R, \quad t = \frac{2}{R},$$

et les équations (u) et (v) deviennent

$$f = \frac{(2\mu-2)R + (2-\mu).D}{(2-\mu)R - 2D}.R, \quad F = \frac{2\mu-2}{2-\mu}.R. \quad (w)$$

274. — *Coroll.* 1. Si $\mu = 2$, par exemple, ces valeurs deviennent simplement

$$f = \frac{R^2}{D}, \quad F = \infty.$$

Comme f et F désignent alors les proximités du foyer à la surface postérieure de la sphère, nous voyons que le foyer des rayons parallèles tombe sur cette surface, et que, dans tout autre cas (fig. 51 et 52), q est donné par la proportion

$$QC : CE :: EH : Hq.$$

275. — *Coroll.* 2. Quelle que soit la valeur de μ après la seconde réfraction, le foyer des rayons parallèles partagera en deux parties égales la distance entre la surface postérieure de la sphère et le foyer après la première réfraction.

276. — *Exemple* 2. Déterminer les foyers d'un hémisphère dans le cas où les rayons incidents tombent sur la

surface convexe, et dans celui où ils tombent sur la surface plane.

Dans le premier cas,

$$R' = R, \; R'' = o, \; t = \frac{1}{R};$$

d'où

$$f = \frac{(\mu - 1)R + D}{R - D} \cdot R, \; F = (\mu - 1)R.$$

277. — Dans l'autre cas, lorsque les rayons tombent d'abord sur la surface plane,

$$R' = o, \; R'' = -R, \; \text{et } t = \frac{1}{R};$$

de manière que

$$f = \frac{\mu(\mu - 1)R + D}{\mu R - D} \cdot R, \; F = (\mu - 1)R.$$

278. — Si l'épaisseur du segment sphérique dont la face convexe est tournée vers les rayons incidents est au rayon dans le rapport de μ à $\mu - 1$, c'est-à-dire si

$$t = \frac{\mu}{\mu - 1} : \frac{1}{R} = \frac{1}{(1 - m)R}, \; \text{et } R'' = o,$$

les expressions (u) et (v) deviennent

$$f = -(\mu - 1)\frac{R}{D}[(\mu - 1)R + D], \; F = \infty.$$

Le foyer des rayons parallèles tombe alors sur la face postérieure du segment.

279. — En général, pour un segment sphérique quelconque dont la surface convexe reçoit les rayons, $R'' = o$, et

$$f = \mu \frac{(\mu - 1)R + D}{\mu + [(\mu - 1)R + D]t}; \; F = \frac{\mu(\mu - 1)R}{\mu + (\mu - 1)Rt}.$$

Si la face plane est exposée aux rayons,

$$f = (\mu - 1)R + \frac{\mu D}{\mu - t D}; \quad F = (\mu - 1)R.$$

280. — Si $R' = R''$, c'est-à-dire si la lentille est une lame sphérique de courbures égales, l'une convexe et l'autre concave,

$$f = \frac{\mu D + (\mu - 1)[(\mu - 1)R + D]Rt}{\mu - [(\mu - 1)R + D]t}, \quad F = \frac{(\mu - 1)^2 R^2 t}{\mu - (\mu - 1)Rt}.$$

—

§ X. — *Aberration d'un système de surfaces sphériques.*

Recherche du foyer d'un petit anneau de surface sphérique. — Aberration longitudinale ; — latérale. — Cas de rayons parallèles. — Cas de réflecteurs. — Définition et recherche des foyers aplanétiques. — L'aberration raccourcit le foyer quand les rayons sont parallèles. — Effets de l'aberration dans d'autres cas. — Aberration d'un système quelconque de surfaces sphériques en contact. — Valeurs successives de f. — Aberration d'une seule lentille infiniment mince. — Formule générale d'où dépend cette aberration. — Cas où l'aberration d'une seule lentille peut devenir nulle. — L'on ne connaît point de milieu qui rende l'aberration nulle, dans le cas de parallélisme des rayons. — Cas où l'aberratiou accourcit ou allonge le foyer. — Cas d'un ménisque de verre. — Règle applicable à une classe nombreuse de lentilles, pour trouver l'effet de l'aberration par rapport à l'allongement ou à l'accourcissement du foyer. — Ce qu'il faut faire en d'autres cas. — Cas de la réflexion pour un système de surfaces transparentes. — Construction générale d'une lentille aplanétique. — Cas où les surfaces d'une lentille aplanétiques sont toutes sphériques. — Forme la plus avantageuse à donner à une seule lentille, dans le cas de rayons parallèles. — Cas où cette forme est plano-convexe. — Aberrations de différentes espèces de lentilles quand les rayons sont parallèles. — Aberration d'un système de lentilles ; — son expression générale. — Cas de rayons parallèles. — Formule générale pour la destruction de l'aberration, dans le cas de deux lentilles et de rayons parallèles. — Autre forme de la même équation.

Problème.

281. — Déterminer le foyer d'un anneau d'une surface réfractante ou réfléchissante.

Les équations (a) de l'art. 244 contiennent au fond la so-

lution générale de ce problème; mais les nombreuses applications que l'on en fait dans la pratique exigent une solution approximative pour des anneaux d'un petit diamètre, ou pour lesquels y est peu considérable par rapport à r. En négligeant alors les puissances de y, supérieures à la troisième, les formules de l'article cité deviennent

$$x = a - \sqrt{r^2 - y^2} = a - r + \frac{y^2}{2r}, \quad a - x = r - \frac{y^2}{2r},$$

$$yZ = \mu r(a - r) + \frac{a(\mu^2 r - a)}{2\mu r(a - r)} y^2.$$

Substituant ces valeurs dans celle de $\overline{Cq}$ du même article, l'on obtiendra pour la distance entre le foyer des rayons réfractés et le sommet

$$\overline{Cq} = \frac{\mu(r - a)}{a - \mu a + \mu r} - \frac{\mu - 1}{2\mu} \cdot \frac{a^2(a + \mu r)}{(a - r)(a - \mu a + \mu r)^2} \cdot \frac{y^2}{r}. \quad (a)$$

282. — Néanmoins, pour nous conformer au système de notation suivi dans la section précédente, au lieu de $\overline{Cq}$, nous emploierons sa valeur réciproque.

Comme nous avons jusqu'ici représenté par f cette valeur réciproque pour les rayons centraux, nous lui conserverons la même signification; et, pour les rayons qui tombent à la distance y du sommet, nous désignerons par $f + \Delta f$ la quantité $\frac{1}{\overline{Cq}}$: Δf sera alors la partie de f due à la déviation du point d'incidence à l'égard du sommet. Si l'on néglige maintenant y^4, il vient

$$\frac{1}{\overline{Cq}} = \frac{a - \mu a + \mu r}{\mu r(r - a)} + \frac{\mu - 1}{2\mu^3} \cdot \frac{a^2(a + \mu r)}{r^3(a - r)^3} y^2. \quad . \quad (b)$$

Posant toujours, comme nous l'avons fait jusqu'ici,

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad r = \frac{1}{R}, \quad a = \frac{1}{R} - \frac{1}{D},$$

et substituant ces valeurs dans l'équation précédente, nous aurons la valeur de $\frac{1}{\overline{Cq}}$ ou de $f + \Delta f$ en fonction de m, R et D. En retranchant de cette valeur le terme indépendant de y^2, qui est la valeur de f, nous trouvérons pour Δf

$$\Delta f = \frac{m(1-m)}{2} (R - D)^2 \, [mR - (1+m)D] y^2 . . \quad (c)$$

283. — *Définitions*. L'*aberration longitudinale* est la distance entre le foyer des rayons centraux et le foyer q de l'anneau dont le demi-diamètre ou *ouverture* est $y = MP$.

L'*aberration latérale* au foyer est la déviation qu'éprouve le rayon réfracté par rapport à l'axe; c'est la ligne comprise entre le rayon extrême et la perpendiculaire à l'axe élevée au foyer central.

284. — *Corollaire*. Ces aberrations se déduisent aisément de la valeur de Δf donnée plus haut : en effet, puisque

$$\overline{Cq} = \frac{1}{f},$$

l'on a

$$\Delta \, . \, \overline{Cq} = \text{l'aberration longitudinale}, = \Delta \frac{1}{f} = -\frac{\Delta f}{f^2};$$

ou, en nommant ω cette aberration,

$$\omega = -\frac{\Delta f}{f^2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

et puisque

$$\overline{Cq} : \overline{qk} :: y : fk, \quad \text{ou} \; \frac{1}{f} : \omega :: y : fk,$$

nous avons fk ou l'aberration latérale

$$= f . y . \omega = -\frac{\Delta f}{f} . y ; \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

équation dans laquelle

$$f = (1 - m) R + m D.$$

Ainsi toute la théorie de l'aberration dépend de la valeur de Δf. Nous passerons maintemant à la discussion des différents cas qui peuvent se présenter.

285. — *Premier cas*. Pour des rayons parallèles, $D = o$, et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f = \frac{m^2(1-m)}{2} \cdot R^3 y^2, \quad \omega = -\frac{m^2}{2(1-m)} R y^2 \\ \text{l'aberration latérale} = -\frac{m^2}{2} R^2 y^3. \end{array}\right\} (f).$$

286. — *Second cas*. Pour des réflecteurs,

$$m = \mu = -1,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f = R(R-D)^2 y^2, \quad \omega = -\frac{R(R-D)^2}{(2R-D)^2} y^2 \\ \text{l'aberration latérale} = -\frac{1}{2}(R-D)^2 y^3; \end{array}\right\} (g)$$

ce qui devient, quand les rayons sont parallèles,

$$\left.\begin{array}{l} \Delta f = R^3 y^2, \quad \omega = -\frac{1}{4} R y^2 \\ \text{l'aberration latérale} = -\frac{1}{2} R^2 y^3. \end{array}\right\} \ldots (h)$$

287. — Dans le cas général, en posant $D = R$ ou bien $m R - (1+m) D = o$, ce qui donne

$$D = \frac{m}{m+1} R, \quad \frac{1}{D} = (\mu + 1) \frac{1}{R},$$

la valeur de Δf, et par conséquent l'aberration même, s'évanouit par ces deux hypothèses : dans la première, les rayons convergent vers le centre de courbure, et échappent ainsi à la réfraction ; dans la seconde, le point cherché est le même que celui de l'art. 234.

Il est évident, d'après ce que nous avons démontré à cet article, que toute surface sphérique CP a sur son axe deux

points conjugués Q, q, tels, que les rayons convergents ou divergents par rapport à l'un d'eux doivent, après leur réfraction, converger ou diverger *rigoureusement* par rapport à l'autre.

Nous nommerons ces points les *foyers aplanétiques* de la surface; et, pour les distinguer, Q sera le foyer aplanétique des rayons incidents, et q celui des rayons réfractés. Pour les déterminer dans un cas quelconque, sur l'axe de la surface proposée C et du *côté concave*, l'on prendra

$$CQ = (\mu + 1) \times \text{le rayon } CE \text{ de la surface,}$$

$$\text{et } Cq = \left(\frac{1}{\mu} + 1\right) \times \text{le rayon.}$$

Q et q seront alors les foyers aplanétiques demandés.

Dans le cas de la réflexion,

$$\mu = -1, \quad CQ = Cq = 0,$$

et les foyers aplanétiques coïncident tous deux avec le sommet du réflecteur.

288. — L'effet de l'aberration est d'allonger ou de raccourcir le foyer, suivant la position du foyer des rayons incidents. D'abord, quand $D = 0$, c'est-à-dire quand les rayons sont parallèles, Δf et R sont de même signe, et par conséquent ω est de signe contraire ainsi que

$$F = (1 - m) R.$$

Dans ce cas donc il est évident que l'aberration *raccourcit le foyer des rayons extérieurs*.

289. — Q maintenant est supposé infiniment éloigné : à mesure qu'il approche de la surface, ou que les rayons, de parallèles qu'ils étaient, deviennent de plus en plus convergents ou divergents, l'aberration diminue; mais le foyer des rayons extérieurs est toujours plus *rapproché* de la surface que celui des rayons centraux, jusqu'à ce que Q coïncide avec A, *foyer aplanétique des rayons incidents* dans la partie

concave (fig. 54), ou avec le foyer des rayons parallèles (E) dans la *partie convexe*. Lorsque Q occupe le premier de ces points, l'aberration est nulle; s'il occupe le second, elle devient infinie.

290. — Quand Q se trouve entre ces deux points, l'aberration a pour effet de rejeter le foyer des rayons extérieurs plus loin de la surface que celui des rayons centraux. Ces résultats se déduisent facilement de la considération d'une foule de cas particuliers, et ont lieu pour toutes les courbures et pour tous les milieux réfringents.

Quant aux réflecteurs, les foyers aplanétiques coïncident avec le sommet, et le foyer des rayons extérieurs est plus court que celui des rayons intérieurs dans tous les cas, en exceptant celui où le point rayonnant se trouve, du côté concave, entre la surface et le foyer principal. Dans ce dernier cas, au contraire, il devient plus long.

Problème.

291. — Assigner les aberrations d'un système de surfaces sphériques qui se suivent immédiatement.

Conservant la notation de l'art. 257, considérons le rayon au moment où il tombe sur la seconde surface, après avoir traversé la première. Son aberration proviendra alors de deux causes distinctes : 1° de ce qu'après son passage par la première surface, au lieu de converger ou diverger vers le foyer des rayons centraux, sa direction était réellement vers un point de l'axe autre que ce foyer, effet dû à l'aberration de la première surface; 2° de ce que, tombant à une certaine distance du sommet de la seconde surface, il se fait une nouvelle aberration.

Commes ces aberrations partielles sont toutes deux assez petites, les principes du calcul différentiel nous permettent de les calculer séparément, en les regardant comme indépendantes entre elles, et de prendre leur somme pour l'aberra-

tion totale du système des deux surfaces. Cette remarque est encore vraie à l'égard des petits changements qu'éprouvent les valeurs de f', f'', etc., par les aberrations. Si nous notons ainsi par $\delta f''$ le changement produit dans la valeur de f'' par l'action de la première surface, par $\delta' f''$ celui qui résulte immédiatement de la seconde, et par $\Delta f''$ l'altération totale due à ces deux causes, nous aurons

$$\Delta f'' = \delta f'' + \delta' f''.$$

Maintenant, pour trouver d'abord l'altération partielle provenant de l'altération totale $\Delta f'$ dans la valeur de f', c'est-à-dire de l'aberration de la première surface, nous avons

$$f'' = (1 - m) \, R'' + m'' f',$$

et par conséquent

$$\delta f'' = m'' \, \Delta f',$$

puisque dans ce cas

$$D' = D, \; D'' = f', \; D''' = f'', \text{ etc.}$$

Pour déterminer la variation partielle $\delta' f''$ provenant immédiatement de l'action de la seconde surface, nous aurons recours à l'équation (c), qui donne sur-le-champ, en écrivant f' au lieu de D, et en négligeant y^4, etc.,

$$\delta' f'' = \frac{m''(1-m'')}{2} (R'' - f')^2 \, [\, m'' R'' - (1 + m'') f' \,] \, y^2.$$

Cette même équation donne aussi

$$\delta f'' = m'' \Delta f' = \frac{m'' m' (1 - m')}{2} (R' - D)^2 \, [m' R' - (1 + m') D] \, y^2.$$

Nous obtiendrons donc la valeur de $\Delta f''$ en réunissant ces deux variations.

La valeur de $\Delta f'''$ peut se déduire de celle $\Delta f''$ d'une manière absolument semblable, et l'on a pour résultat

$$\Delta f''' = m'' \Delta f'' + \frac{m'''(1-m''')}{2} (R''' - f'')^2 \, [m''' R''' - (1 + m''') f''] \, y^2,$$

et ainsi de suite. Nommant alors, comme à l'article 257, M', M'', M'''... $M^{(n)}$, les indices de réfraction absolus de chaque milieu que le rayon traverse successivement, et posant $M^{(n)} = M$, l'on parvient sans peine à l'expression générale suivante, dans laquelle Δf désigne l'effet total de l'aberration à l'égard de f, valeur inverse de la distance focale du système :

$$M.\Delta f = \left\{ \begin{array}{l} M' \dfrac{m'(1-m')}{2}(R' - D)^2[m'R' - (1+m')D] \\ + M'' \dfrac{m''(1-m'')}{2}(R'' - f')^2[m''R'' - (1+m'')f'] \\ + M''' \dfrac{m'''(1-m''')}{2}(R''' - f'')^2[m'''R''' - (1+m''')f''] \end{array} \right\} y^2. \quad (i)$$

L'on se rappellera que

$$\left. \begin{array}{l} f' = (1 - m') R' + m' D \\ f'' = (1 - m'') R'' + m'' (1 - m') R' + m' m'' D \\ f''' = (1 - m''') R''' + m''' (1 - m'') R'' \\ \quad + m''' m'' (1 - m') R' + m''' m'' m' D. \end{array} \right\} (j)$$

292. — Ces valeurs étant substituées dans celle de Δf, cette dernière quantité se trouvera exprimée en fonction explicite des rayons des surfaces et de leurs indices de réfraction, ou de quantités réciproques à celles-ci.

Si le système se trouve dans le vide, ou si la dernière réfraction se fait dans le vide, $M = 1$, et le second membre de l'équation (i) fournit une expression fort simple de la valeur de Δf.

Dans tous les cas, l'aberration totale est donnée, comme ci-dessus, par l'équation

$$\omega = -\frac{\Delta f}{f^2},$$

et l'aberration latérale

$$= -\frac{\Delta f}{f} y.$$

293. — Pour exprimer l'aberration d'une lentille infiniment mince placée dans le vide, désignons respectivement par Q′, Q″, etc., les différents termes de l'équation générale; de manière que

$$M \cdot \Delta f = (Q' + Q'' + Q''' + \text{etc.})\, y^2. \quad (k)$$

Alors, pour le cas d'une seule lentille dans le vide, quand

$$m'' = \frac{1}{m'},\ M' = \frac{1}{m'},\ M'' = 1,\ M = 1,$$

l'on a

$$\Delta f = Q' + Q'';$$

et, posant pour un moment

$$R' - D = B,\ R' - R'' = C,$$

l'on trouve

$$Q' = \frac{1 - m'}{2} y^2 B^2 (m' B - D)$$

$$Q'' = -\frac{1 - m'}{2\, m'^3} y^2 (m' B - C)^2 (m'^2 B - m' D - C);$$

d'où

$$Q' + Q'' = -\frac{1 - m'}{2\, m'^3} y^2 C[(2m' B - C)(m'^2 B - m' D) + (C - m' B)^2].$$

En écrivant, au lieu de B et de C, leurs valeurs, et $\frac{1}{\mu}$ au lieu de m', le polynome entre parenthèses devient

$$\frac{1}{\mu^3} \Big\{ [(2 - \mu) R' + \mu R'' - 2 D] [R' - (1 + \mu) D] + \mu [(\mu - 1) R' - \mu R'' + D]^2 \Big\}.$$

Après avoir opéré toutes les multiplications et ordonné d'après les puissances de D, l'on substituera le résultat ainsi que la valeur de

$$m' \left(= \frac{1}{\mu}\right) \text{ et de } C\,(= R' - R'')$$

dans l'équation qui donne la valeur de $Q' + Q''$ ($= \Delta f$), et il viendra

$$\Delta f = (\mu - 1)(R' - R'') \cdot \frac{y^2}{2\mu}(\alpha - \beta D + \gamma D^2),$$

en supposant

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (2 - 2\mu^2 + \mu^3) R'^2 + (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3) R' R'' + \mu^3 R''^2 \\ \beta &= (4 + 3\mu - 3\mu^2) R' + (\mu + 3\mu^2) R'' \\ \gamma &= 2 + 3\mu. \end{aligned}\right\} (l)$$

Or il a été démontré, à l'art. 261, que $(\mu - 1)(R' - R'')$ est l'expression du pouvoir de la lentille; de manière qu'en écrivant L à sa place, nous aurons

$$\Delta f = \frac{L}{2\mu}(\alpha - \beta D + \gamma D^2) y^2. \quad . \quad (m)$$

Telle est alors la valeur générale de Δf : on en tirera celle de l'aberration ω pour une lentille quelconque, au moyen de la formule

$$\omega = -\frac{\Delta f}{f^2}.$$

294. — *Coroll.* 1. L'aberration d'une lentille s'évanouit quand il existe entre D et les quantités R, R'' et μ, une relation telle que

$$\alpha - \beta D + \gamma D^2 = 0, \quad D = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma}. \quad . \quad (k)$$

Il vient alors, toute substitution et réduction faites,

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \mu^2 [(R + R'')^2 - (2\mu + 3\mu^2)(R' - R'')^2].$$

Si cette quantité n'est point positive, c'est-à-dire si l'on n'a pas

$$\left(\frac{R' + R''}{R' - R''}\right)^2 > 2\mu + 3\mu^2,$$

le foyer des rayons incidents ne peut avoir une situation telle que l'aberration disparaisse; mais si les courbures R' et R'' satisfont à cette condition, la valeur de D peut se déduire sur-le-champ de l'équation (*k*).

295. — *Coroll.* 2. Chaque fois que, dans les ménisques ou dans les lentilles concavo-convexes, la différence des courbures est petite en comparaison de leur somme, c'est-à-dire chaque fois que de grandes courbures ne produisent qu'une longueur focale médiocre, l'on pourra réduire l'aberration à volonté, en plaçant convenablement le foyer des rayons incidents. Pour une lentille de crown-glass,

$$\mu = 1.52 \text{ et } \sqrt{3\mu + 3\mu^2} = 3.16 :$$

par conséquent la somme des courbures doit égaler au moins 3 . 16 fois leur différence.

Quant aux lentilles bi-convexes ou bi-concaves, R' et R'' étant de signe contraire, il est impossible de satisfaire à la condition exigée.

296. — *Coroll.* 3. Si $\alpha = 0$, l'aberration s'évanouit quand les rayons sont parallèles. Dans ce cas, cependant, les valeurs de R' et de R'' ne peuvent être réelles qu'autant que μ ne surpasse pas $\frac{1}{4}$, et l'on ne connaît aucun milieu doué d'un pouvoir réfringent aussi faible.

297. — *Coroll.* 4. L'aberration aura pour effet d'accourcir ou d'allonger le foyer des rayons extérieurs, suivant que les signes de Δf et de f seront semblables ou opposés.

Dans certains cas particuliers, cependant, cet effet dépendra des valeurs attribuées à μ, R, R' et D. Le cas le plus important est celui de rayons parallèles : D est alors égal à zéro, et

$$\Delta f = \frac{y^2}{2\mu} L \begin{bmatrix} (2 - 2\mu^2 + \mu^3) R'^2 \\ + (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3) R'R'' + \mu^3 R''^2 \end{bmatrix}.$$

Le foyer des rayons extérieurs sera plus court ou plus long que celui des rayons centraux, suivant que cette quantité aura un signe semblable ou opposé à celui de L, c'est-à-dire suivant que

$$(2 - 2\mu^2 + \mu^3) R'^2 + (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3) R' R'' + \mu^3 R''^2$$

sera positif ou négatif. Or, d'après ce que nous avons vu dans le corollaire précédent, cette quantité ne peut devenir négative par aucune valeur réelle de R' et de R'', à moins que $\mu < \frac{1}{4}$. Pour tous les autres milieux (ce qui comprend toutes les substances diaphanes connues jusqu'à ce jour) travaillés en forme de lentilles, la longueur focale des rayons extérieurs sera donc plus courte que celle des rayons centraux, quelle que soit d'ailleurs la courbure des surfaces.

298. — *Coroll.* 5. Pour un ménisque de verre, quand le point rayonnant se trouve du côté *convexe*, et que les rayons *divergent*, $4 + 3\mu - 3\mu^2$ est une quantité positive : or, R' et R'' étant tous deux positifs, β l'est également. Ainsi (D étant négatif dans ce cas) le terme $-\beta D$, et par conséquent tout le facteur $\alpha - \beta D + \gamma D^2$, est positif. De plus, L étant aussi positif, Δf l'est également, et l'aberration ω devient négative. Il suit de là que, lorsque le point Q est au-delà de F, le foyer des rayons parallèles tombant de l'autre côté, celui des rayons extérieurs est le plus court; mais il est le plus long si Q se trouve entre F et C.

299. — *Coroll.* 6. A moins que

$$\left[\frac{R' + R''}{R - R''}\right]^2 > 2\mu + 3\mu^2,$$

aucune valeur réelle de D ne peut rendre négatif le trinome

$$\alpha - \beta D + \gamma D^2.$$

Il résulte de là que, dans toutes les lentilles bi-convexes ou bi-concaves, aussi bien que dans les ménisques et dans les

lentilles concavo-convexes où la somme des courbures des surfaces fait plus que $\sqrt{2\mu + 3\mu^2}$ fois leur différence, le facteur $\alpha - \beta D + \gamma D^2$ est positif pour toutes les valeurs de D, et par conséquent l'aberration ω est d'un signe contraire à celui de L. Ainsi, pour toutes ces lentilles, l'on peut énoncer la règle suivante, qui est à la fois simple et générale :

L'aberration a pour effet de rejeter le foyer des rayons extérieurs plus près de la source de la lumière que celui des rayons centraux, quand la lentille a pour caractère le signe +, c'est-à-dire quand elle fait converger les rayons parallèles ; au contraire, elle le rejette plus loin si la lentille est caractérisée par le signe —, c'est-à-dire si elle fait diverger les rayons parallèles.

300. — *Coroll.* 7. Toutes les autres lentilles ont, comme dans le cas de simples surfaces, des foyers aplanétiques correspondants aux racines de l'équation

$$\alpha - \beta D + \gamma D^2 = 0.$$

En général, il y a deux foyers semblables pour les rayons incidents et deux pour les rayons réfractés, et l'on peut aisément trouver des règles pour déterminer dans quelles positions du point lumineux, par rapport à ces foyers et à la lentille, l'aberration tend à accourcir ou à allonger le foyer extérieur ; mais il est plus simple et plus expéditif d'avoir recours directement aux formules algébriques.

301. — *Coroll.* 8. Dans le cas de la réflexion, quand les rayons, par exemple, sont réfléchis entre les surfaces de lentilles même de matière diaphane, l'on a

$$m' = m'' = \text{etc.} = \mu' = \mu'' \text{ etc.} = -1,$$
$$M' = -1, \quad M'' = +1, \text{ etc., et } M = \pm 1,$$

suivant que le nombre des réflexions est pair ou impair.



Ainsi pour n réflexions on aura

$$\left.\begin{array}{l} f' = 2\,R' - D, \\ f'' = 2\,R'' - 2\,R' + D, \\ f''' = 2\,R''' - 2\,R'' + 2\,R' - D, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (p)$$

et

$$\Delta f = (-1)^{n+1} \left\{ \begin{array}{l} R' \ (R' - D)^2, \\ - R'' \ (R'' - 2\,R' + D)^2, \\ + R''' \ (R''' - 2\,R'' + 2\,R' - D)^2, \\ - \text{etc.} \end{array} \right\} y^2; (q)$$

formules qui servent à déterminer, dans tous les cas de réflexion interne entre des surfaces sphériques, les deux places des foyers successifs et les aberrations.

302. — *Coroll.* 9. Si les réflexions se font entre des surfaces de même courbure, dont les concavités sont tournées en sens opposés, f', f'', etc., se suivent en progression arithmétique, et par conséquent leurs valeurs inverses ou les distances focales en progression harmonique.

Problème.

303. — Construire une lentille aplanétique, c'est-à-dire qui réfracte en un seul point tous les rayons convergents ou divergents partis d'un autre point.

Soient Q et q les deux points en question, le premier étant le foyer des rayons incidents, l'autre celui des rayons réfractés. Soit μ l'indice de réfraction; posant $Qq = 2c$, et donnant à b une valeur arbitraire, on construira la courbe dont l'équation est (n), art. 232. Soit HPC (fig. 36) cette courbe : du centre q, avec un rayon qN moindre que le rayon réfracté quelconque qP, l'on décrira le cercle HNK.

Alors, puisque le rayon Q P, par la nature de la courbe H P C, est dirigé vers le point q après sa réfraction, et qu'il tombe perpendiculairement sur la seconde surface, il n'éprouvera aucune inflexion, et, à sa sortie du milieu, il continuera sa route vers q. Si l'on suppose alors que la figure C P N K tourne autour de Qq, elle engendrera un solide de révolution, qui sera la lentille demandée, puisque sa matière est celle du milieu même. Quand les rayons sont parallèles, comme dans la fig. 58, nous savons déjà que la courbe est une section conique, et que c'est une ellipse quand la lentille est plus dense que le milieu ambiant. Ainsi un ménisque de verre dont la surface antérieure et convexe est une ellipse, et dont la surface postérieure appartient à une sphère dont le centre est au foyer des rayons réfractés, est une lentille *aplanétique*.

304. — Mais, sans avoir recours aux sections coniques, on peut, dans certains cas, produire le même effet avec de simples surfaces sphériques. En effet, Q et q (fig. 63) étant les *foyers aplanétiques* d'une surface sphérique réfractante, si du centre q, avec un rayon quelconque plus grand que q C quand les rayons incidents divergent du point Q comme dans la partie inférieure de la figure, mais moindre que q C s'ils convergent comme dans le cas précédent, l'on décrit le cercle K L ou $k\,l$, et que l'on fasse tourner la figure autour de Qq comme axe, les surfaces C P K L ou $cpkl$ engendreront la lentille en question. Cette construction est une conséquence évidente de la formule générale (i), art. 291 : car si $R'' = f'$, la valeur de Δf devient simplement

$$\frac{1 - m'}{2}(R' - D')^2 \, [\, m'R' - (1 + m')\, D \,]\, y^2,$$

et s'évanouit quand

$$D = \frac{m'}{1 + m'} R',$$

c'est-à-dire quand Q est le foyer aplanétique des rayons incidents sur la première surface.

L'équation

$$\alpha - \beta D + \gamma D^2 = 0$$

donne néanmoins une relation entre μ, D, R' et R'', qui permet de construire une lentille aplanétique dans le cas général. (Voy. *Coroll.* 1, art. 294.)

Problème.

305. — Assigner la forme la plus avantageuse que puisse prendre une seule lentille d'un pouvoir donné, pour que celle-ci ait la moindre aberration possible quand les rayons sont parallèles.

Puisque l'aberration ne peut être entièrement détruite dans le cas de rayons parallèles, quand $\mu > \frac{1}{4}$ (art. 296), nous essaierons de la rendre la plus petite possible. Or

$$\omega = -\frac{\Delta f}{f^2} = -\frac{\Delta f}{L^2}$$

pour des rayons parallèles, ou

$$\omega = -\frac{y^2}{2\mu} \cdot \frac{\alpha}{L},$$

et en général

$$d\omega = -\frac{y^2}{2\mu}[L\,d\alpha - \alpha\,dL].$$

Dans le cas actuel L est donnée : nous devons donc poser

$$d\alpha = 0;$$

d'où résulte

$$0 = 2(2 - 2\mu^2 + \mu^3) R' d R'$$
$$+ (\mu + 2\mu^2 - 2\mu^3)(R' d R'' + R'' d R') + 2\mu^3 R'' d R''.$$

Mais la condition $dL = 0$ donne

$$dR' = dR'':$$

ce qui réduit notre équation à

$$o = (4 + \mu - 2\mu^2) R' + (\mu + 2\mu^2) R'';$$

d'où l'on tire

$$\frac{R''}{R'} = \frac{2\mu^2 - \mu - 4}{2\mu^2 + \mu} \quad \ldots \quad (r)$$

Dans le cas d'une lentille de verre, en prenant $\mu = 1.5$, cette fraction devient égale à $-\frac{1}{6}$: ce qui montre que la lentille doit être bi-convexe, et que la courbure de la surface postérieure ne doit être que le sixième de celle de la surface antérieure, ou que son rayon doit être six fois plus grand.

Les opticiens donnent quelquefois à de tels verres le nom de *lentilles croisées*.

306. — *Coroll.* 1. Si $\mu = 1.6861$, valeur qui convient à peu près aux pierres précieuses et aux verres les plus réfringents, $R'' = o$; et la figure la plus avantageuse pour concentrer la lumière est celle d'une lentille plano-convexe dont la surface courbe reçoit les rayons incidents.

307. — *Coroll.* 2. Nommant ω l'aberration d'une lentille de la forme la plus avantageuse, nous aurons

$$\omega = -\frac{15}{14} y^2 \,.\, L$$

pour l'espèce de verre dont l'indice de réfraction $= 1.5$; et les aberrations dues à d'autres formes seront proportionnelles à cette quantité :

Lentille plano-convexe dont la face plane est tournée du côté des rayons incidents . . . . $4.2 \times \omega$

plano-convexe, tournée en sens opposé . . . . $1.081 \times \omega$

bi-convexe ou bi-concave avec les deux faces d'égale courbure . . . $1.567 \times \omega$

Problème.

308. — Trouver l'expression générale de l'aberration d'un système quelconque de lentilles infiniment minces placées immédiatement l'une derrière l'autre dans le vide.

La valeur générale de M Δf (ou de Δf, puisque dans l'hypothèse actuelle M $=1$) est

$$(Q' + Q'' + Q''' + Q^{\text{iv}} + \text{etc.})\, y^2,$$

qui se divise en plusieurs termes provenant successivement de chaque lentille, de la manière suivante :

$$\Delta f = (Q' + Q'')\, y^2 + (Q''' + Q^{\text{iv}})\, y^2 + \text{etc.}$$

Nous avons déjà considéré la première de ces quantités ; essayons maintenant de découvrir la composition des autres termes.

Soient donc μ' l'indice de réfraction de la première lentille, μ'' celui de la deuxième, μ''' celui de la troisième, et α', β', γ', les valeurs de α, β, γ, pour la première lentille, ou les expressions (*l*), art. 292, en y changeant seulement μ en μ'. Soient de même α'', β'', γ'', les valeurs analogues pour la deuxième lentille, c'est-à-dire ce que deviennent ces mêmes expressions (*l*) quand on écrit μ'' au lieu de μ, et R''' et R^{iv} au lieu de R' et de R'', et ainsi de suite pour toutes les autres lentilles.

309. — L'examen des valeurs de Q''' et de Q^{iv} nous fait voir qu'elles sont composées en m''', m^{iv}, M''', M^{iv}, R''', R^{iv}, f'' et f''', absolument de la même manière que Q' et Q'' le sont en m', m'', M', M'', R', R'', D et f'.

D'ailleurs, puisqu'en vertu de l'art. 251 nous avons

$f' = (1 - m')\,R' + m'\,D,$

$f'' = (1 - m'')\,R'' + m''f',$

$= (1 - m'')\,R'' + m''\,(1 - m')\,R' + m''m'D,$

$= (\mu - 1)\,(R' - R'') + D,$ puisque $m' = \frac{1}{\mu}$, $m'' = \mu$,

$= L + D.$

Nommant D'' cette dernière valeur (L est le pouvoir de la première lentille),

$f''' = (1 - m''')\,R''' + m'''\,D'',$

$f^{iv} = (1 - m^{iv})\,R^{iv} + m^{iv}f''' = L'' + D''$, comme ci-dessus (L'' est le pouvoir de la seconde lentille) ;

$f^{iv} = L + L' + D$, et ainsi de suite.

Il est évident que $Q''' + Q^{iv}$ sera la même fonction de l'indice de réfraction des courbures des surfaces et des quantités D'' et f''' par rapport à la seconde lentille que $Q' + Q''$ par rapport à la première lentille. Il résulte de là qu'en suivant toujours le même système de réductions qui nous a conduit à l'équation

$$Q' + Q'' = \frac{L}{2\,\mu}\,(\alpha - \beta\,D + \gamma\,D^2),$$

nous devons parvenir à une équation exactement de la même forme pour $Q''' + Q^{iv}$, c'est-à-dire que

$$Q''' + Q^{iv} = \frac{L''}{2\,\mu''}\,(\alpha'' - \beta''\,D'' + \gamma''\,D''^2).$$

Il en sera de même des lentilles suivantes : de sorte que l'on aura finalement pour le système entier (en écrivant L', D', μ', au lieu de L, D, μ)

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}\left[\frac{L'}{\mu'}(\alpha' - \beta' D' + \gamma' D'^2) + \frac{L''}{\mu''}(\alpha'' - \beta'' D'' + \gamma'' D''^2) + \text{etc.}\right];\ (s)$$

équation dans laquelle le nombre des termes égalera celui des lentilles.

310. — *Corollaire*. Pour des rayons parallèles,

$$D' = 0\,,\quad D'' = L'\,,\quad D''' = L' + L''\,,\ \text{etc.}\,;$$

par conséquent

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{L'}{\mu'}\alpha' + \frac{L''}{\mu''}(\alpha'' - \beta'' L' + \gamma'' L'^2), \\ \quad + \frac{L'''}{\mu'''}\left[\alpha''' - \beta'''(L' + L'') + \gamma'''(L' + L'')^2\right], \\ \quad + \text{etc.} \end{array}\right\}. \qquad (t)$$

311. — Quoique l'aberration d'une seule lentille ne puisse être détruite entièrement qu'en supposant un certain indice de réfraction qui ne se rencontre point dans la nature, on peut cependant atteindre ce but de différentes manières, en combinant deux ou plusieurs lentilles. Ainsi, dans le cas de deux lentilles, l'expression (t), étant égalée à zéro, fournit une équation qui renferme μ', μ'', L', L'', R', R'', R''', R^{IV}; et, puisque L' et L'' sont des fonctions des quantités connues μ' et μ'', les inconnues se réduisent à quatre, qui sont R', R'', R''', R^{IV}.

Comme l'on peut satisfaire d'une infinité de manières à l'équation unique dont elles dépendent, le problème de la destruction de l'*aberration de sphéricité*, tel que nous l'avons posé, est indéterminé.

312. — Dans le cas de deux lentilles et de rayons parallèles, l'équation est

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \frac{L'}{\mu'}\left[(2 - 2\mu'^2 + \mu'^3)R'^2 + (\mu' + 2\mu'^2 - 2\mu'^3)R'R'' + \mu'^3 R''^2\right], \\ + \frac{L''}{\mu''}\left[(2 - 2\mu''^2 + \mu''^3)R'''^2 + (\mu'' + 2\mu''^2 - 2\mu''^3)R'''R^{IV} \right. \\ \qquad \left. + \mu''^3 R^{IV2}\right], \\ - \frac{L'L''}{\mu''}\left[(4 + 3\mu'' - 3\mu''^2)R''' + (\mu'' + 3\mu''^2)R^{IV}\right] \\ \qquad + \frac{L'^2 L''}{\mu''}(2 + 3\mu''). \end{array}\right\} (u)$$

313. — Quand les pouvoirs L' et L'' des deux lentilles seront donnés, cette équation ne sera que du second degré en R', R'', R''' ou R^{IV} : la réalité des valeurs de ces quantités dépendra donc de l'hypothèse adoptée pour limiter le problème. On pourra toujours en éliminer deux à l'aide des équations

$$L' = (\mu' - 1)(R' - R'') \quad \text{et} \quad L'' = (\mu'' - 1)(R''' - R^{IV}) :$$

l'équation finale (en R' et R''', par exemple) sera

$$\left.\begin{aligned} 0 = & L'\left(\frac{2+\mu'}{\mu'}R'^2 - \frac{2\mu'+1}{\mu'-1}L'R'\right), \\ & + L''\left\{\frac{2+\mu''}{\mu''}R'''^2 - \left[\frac{4(\mu''+1)}{\mu''}L' + \frac{2\mu''+1}{\mu'-1}L''\right]R'''\right\}, \\ & + \frac{\mu'^2 L'^3}{(\mu'-1)^2} + \frac{\mu''^2 L''^3}{(\mu''-1)^2} + \frac{3\mu''+1}{\mu''-1}L'L''^2 + \frac{2+3\mu'}{\mu''}L^2L''; \end{aligned}\right\} (v)$$

et comme les inconnues R', R''', ne sont point combinées par voie de multiplication, lorsque les valeurs de L' et de L'' seront données, elles ne s'élèveront qu'à la seconde puissance. Nous ferons usage de cette équation quand nous exposerons la théorie des lunettes dioptriques.

314. — Si L' et L'' ne sont pas données, puisque chacune de ces quantités est du premier degré en R', R'', etc., l'équation (u) monte au troisième degré, tant en R' qu'en R'', etc., ou en L', L'', si l'on a éliminé R' ou R^{IV}.

Comme toute équation du troisième degré doit avoir au moins une racine réelle, on en conclura

1° *Que, si l'on donne les courbures de trois surfaces dans un système composé de deux lentilles, celle de la quatrième surface peut toujours être prise telle qu'elle détruise l'aberration de sphéricité;*

315. — 2° *Que, si l'on donne la courbure d'une des surfaces de chaque lentille et le pouvoir de l'une d'elles, ou leur*

317. — L'on peut observer d'une manière fort curieuse les effets de l'aberration, en exposant au soleil une grande lentille convexe, couverte d'une feuille de papier percée régulièrement de petits trous ronds : l'on reçoit les rayons convergents sur un papier blanc placé au-dessous de la lentille, en le tenant d'abord très près; puis on l'éloigne peu à peu. Les faisceaux qui traverseront les trous formeront sur l'écran des taches lumineuses dont la distribution deviendra de plus en plus inégale à mesure que l'écran s'éloignera davantage, celles de la circonférence se rapprochant beaucoup plus vite que celles du centre. La manière dont les taches qui correspondent aux rayons centraux se confondent en une seule image au foyer, et dont celles qui répondent aux rayons extérieurs se répandent à l'entour, peut donner une idée très juste de la variation de densité des rayons dans le cercle de moindre aberration au foyer principal ou dans le voisinage de ce point. Si l'on agite rapidement l'écran dans le cône de rayons de manière à le faire passer pardessus le foyer à chaque oscillation, le cône entier se dessinera dans l'air comme un corps solide, et la place du cercle de moindre aberration deviendra sensible à la vue : ce qui rendra l'expérience aussi agréable qu'instructive.

§ XI. — *Des foyers de rayons obliques et de la formation des images.*

Foyers de faisceaux obliques. — Définition des images en optique. — Forme de l'image d'une ligne droite. — Foyers de faisceaux obliques tombant sur un système de surfaces sphériques. — Centre d'une lentille. — Les rayons qui traversent le centre ne dévient point. — Foyer d'un faisceau très peu oblique qui traverse une lentille mince. — Image renversée d'un objet, formée derrière une lentille convexe. — Explication de la chambre obscure. — Vision oblique par rapport à des surfaces réfractantes ou réfléchissantes d'une figure quelconque. — Figure apparente du fond horizontal d'une eau tranquille. — Règles pour trouver le lieu, etc., d'une image. — Règle pour les réflecteurs. — Règles pour les lentilles. — Clarté d'une image. — Les images sont toujours moins éclairées que les objets.

318. — Jusqu'ici nous avons considéré les rayons comme

convergents ou divergents par rapport à un certain point; mais, comme il n'en est pas ainsi lorsque les corps lumineux ont un diamètre sensible, nous allons examiner les différents cas de la réfraction pour des surfaces sphériques quand il s'agit de plus d'un point rayonnant, ou quand plusieurs faisceaux de rayons tombent à la fois sur la surface. Nous continuerons de regarder comme positif et normal le cas de rayons *convergents* qui tombent sur la convexité d'un milieu plus dense que celui qui l'environne, et nous en déduirons tous les autres en changeant convenablement les signes et les grandeurs relatives de R, D, etc.

Soient Q et Q' (fig. 56) les foyers de deux faisceaux de rayons convergents qui tombent sur la surface sphérique C C', dont le centre est E; menons Q E C, Q' E C', qui coupent la surface en C et en C', et regardant C E Q comme l'axe du faisceau R Q, S Q, T Q, l'on trouvera le foyer des rayons réfractés en prenant q de telle manière que $\frac{1}{C\,q}$ ou f soit égal à $(1-m)\,R + m\,D$ [247 (c)]. En regardant C'E Q' comme l'axe du faisceau qui converge vers Q', le foyer q' sera déterminé semblablement par l'équation

$$\frac{1}{C'\,q'} = f' = (1-m)\,R + m\,D'.$$

Ainsi, lorsque C' Q' = C Q, C q' égalera C q; et généralement, dès que l'on connaîtra le lieu du point Q, l'on pourra déterminer celui de q.

319. — *Définition.* En optique, on appelle *image* d'un objet le lieu des foyers de tous les faisceaux de rayons convergents ou divergents émanés de chaque point de cet objet et reçus par une surface réfractante. Ainsi, en regardant Q Q' comme une ligne ou comme une surface, chacun de ses points pouvant être regardé comme un foyer de rayons incidents, $q\,q'$ est son image.

Problème.

320. — Trouver la forme de l'image d'une ligne droite réfléchie ou réfractée par une surface sphérique.

Posant

$$CE = r,\ CQ = a,\ Eq = x,\ qq' = y,$$
$$Eq' = \sqrt{x^2 + y^2},\ C'Q' = a',$$

nous avons

$$\frac{1}{C'Q'} = \frac{1-m}{r} + \frac{m}{a'} = \frac{(1-m)\,a' + mr}{ra'},$$

et par conséquent

$$C'Q' = \frac{ra'}{(1-m)\,a' + mr},\quad Eq' = \frac{mr\,(a'-r)}{(1-m)\,a' + mr};$$

d'où

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2 r^2 (a'-r)^2}{[(1-m)\,a' + mr]^2}.$$

Mais, à cause des triangles semblables,

$$Eq' : Eq :: EQ' : EQ,$$

ou

$$x^2 + y^2 = \frac{(a'-r)^2\,x^2}{a^2}.$$

Egalant ces deux valeurs de $x^2 + y^2$, il vient

$$\frac{a}{x} = \frac{(1-m)\,a' + mr}{mr},\quad a' = \frac{m}{1-m}\cdot\frac{r\,(a-x)}{x};$$

de sorte qu'en éliminant a' par la substitution de cette dernière valeur, nous parviendrons à une équation finale entre x et y, qui sera celle de l'image :

$$(1-m)^2\,(x^2 + y^2) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 (ma - x)^2.$$

Elle appartient, comme on voit, à une section conique.

Problème.

321. — Trouver le foyer des rayons réfractés quand un faisceau oblique tombe sur un système quelconque de surfaces sphériques.

Soit E′ (fig. 57) le centre de la première surface, et Q′ le foyer des rayons incidents.

Menons la droite Q′ E′, et prolongeons-la jusqu'en C′, qui sera le sommet de la surface correspondant au faisceau dont le foyer est Q′; faisant ensuite

$$\frac{1}{C' Q''} = \frac{1 - m'}{C' E'} + \frac{m'}{C' Q'},$$

Q″ sera le foyer des rayons réfractés. Joignons maintenant Q″ et E″ centre de la seconde surface; prolongeons la droite jusqu'en C″, et prenons

$$\frac{1}{C'' Q'''} = \frac{1 - m''}{C'' E''} + \frac{m''}{C'' Q''}:$$

Q‴ sera alors le foyer après la réfraction due à la seconde surface, et ainsi de suite.

322. — *Corollaire.* Dans le cas d'une lentille infiniment mince, quand l'obliquité est peu considérable, il résulte de cette construction que le foyer des rayons obliques sera à la même distance de la lentille que le point par rapport auquel les rayons convergent ou divergent. Ce point est à la même distance que le foyer des rayons incidents; mais, au lieu d'être sur l'axe, il se trouve un peu à côté.

323. — *Définition.* Le *centre* d'une lentille est le point où son axe se trouverait coupé par la droite qui joindrait les extrémités de deux rayons de ses surfaces, parallèles entre eux : ainsi, dans les diverses lentilles représentées par les fig. 58, 59, 60 et 61, E′ A et E″B étant deux rayons parallèles,

en joignant B et A, et prolongeant, s'il est nécessaire, jusqu'à ce que B A rencontre l'axe en X, X sera le centre cherché.

324. — *Coroll.* 1. Le centre est un point fixe : en effet, puisque A E′ et B E″ sont parallèles, l'on a

$$E'X : E'E'' :: AE' : BE'' - AE'.$$

Dans cette proportion, il y a trois termes invariables : il faut donc que le quatrième le soit aussi.

325. — *Coroll.* 2. Si l'on désigne par t (quantité essentiellement positive) l'intervalle C′ C″ entre les surfaces ou l'épaisseur de la lentille, et par R′ et R″ les courbures de ces mêmes surfaces, la distance du centre à la première surface, ou C′ X, aura pour valeur

$$C'X = \frac{R''}{R' - R''}\, t.$$

326. — *Coroll.* 3. Quand un rayon incident passe par le centre de la lentille après sa première réfraction, il n'éprouve aucune déviation : en effet, sa route étant A B, les angles d'incidence sur les deux surfaces sont égaux à cause du parallélisme de E′ A et de E″ B; de là résulte l'égalité des angles extérieurs de réfraction : par conséquent les deux parties du rayon hors la lentille sont parallèles.

327. — *Coroll.* 4. Si la lentille est très mince, le rayon qui traverse son centre peut être considéré comme non réfracté; car, l'intervalle A B dans la lentille étant très petit, les deux parties du rayon parallèles et extérieures à la lentille peuvent être regardées comme ne formant qu'une seule ligne droite.

Cette hypothèse approche d'autant plus de la vérité que l'obliquité des rayons est moindre, parce qu'alors la partie

A B tend davantage à coïncider en direction avec les portions extérieures.

328. — *Coroll.* 5. Ainsi, pour trouver le foyer des rayons réfractés dans le cas d'une *lentille très mince*, et pour un *faisceau très peu oblique*, l'on fera passer par X, centre de la lentille, la droite Q X : le foyer doit s'y trouver à la même distance de la lentille que si l'axe du faisceau incident coïncidait avec celui de cette lentille.

329. — *Théorème.* Quand un luminaire ou un objet éclairé est placé devant une lentille bi-convexe, plano-convexe ou ménisque, à une distance plus grande que la longueur focale, il se forme derrière la lentille une image semblable à l'objet, mais renversée : l'objet et l'image soutendent le même angle au centre de la lentille.

Après la réfraction, les faisceaux de rayons qui émanent (directement ou par réflexion) de chaque point P de l'objet iront converger vers un autre point p derrière la lentille, ou du moins ils ne s'en écarteront pas sensiblement. Si la lentille était exempte d'aberration, cette convergence serait mathématiquement exacte; et, puisque l'ouverture de la lentille et l'obliquité du faisceau sont peu considérables, l'aberration est si petite que l'espace éclairé par le faisceau réfracté pourra être regardé comme un point physique, et chaque point de l'objet aura dans l'image son point correspondant. De plus, C étant le centre de la lentille, la droite P p doit passer par C; et, la même chose ayant lieu pour toute droite qui joint un point de l'objet au point de l'image qui lui correspond, la similitude des triangles fait voir que l'objet et l'image sont des figures semblables. Comme les rayons se croisent en C, l'image est renversée, et soutend en C l'angle p C q égal à l'angle P C Q soutendu par l'objet de l'autre côté de la lentille.

330. — Si l'on place en $p\,q$ un écran de papier blanc,

l'objet viendra s'y peindre avec toutes ses couleurs. Cette expérience peut se faire avec un verre convexe quelconque adapté au volet d'une fenêtre, et l'écran reproduira en miniature, mais avec la plus parfaite fidélité, les formes des objets extérieurs, les maisons, les arbres, la campagne, etc.

Tel est le principe de la chambre obscure ordinaire. Les rayons émanés des objets extérieurs sont reçus d'abord sur un miroir incliné qui les fait tomber verticalement sur une lentille convexe dont le foyer se trouve sur une table horizontale couverte d'un papier blanc, dans une chambre qui ne reçoit pas d'autre lumière : cette table offre alors un tableau animé, où chaque objet conserve sa forme, sa couleur et son mouvement, avec un charme et une perfection dont l'art ne peut approcher. (Voy. la fig. 63, où P est l'objet, A B le réflecteur, B C la lentille et *p* l'image sur la table D.)

331. — Si l'on remplaçait le papier blanc par une plaque de verre usé à l'émeri d'un côté, le tableau deviendrait visible en même temps pour un œil placé de l'autre côté du verre : car c'est une propriété des surfaces dépolies et diaphanes de répandre la lumière, non seulement par réflexion, mais encore par réfraction au travers de leur épaisseur.

Cependant, si le verre n'est que faiblement dépoli, l'image paraîtra beaucoup moins vive en la regardant obliquement qu'en plaçant l'œil immédiatement sous le verre. Dans cette dernière situation, l'on pourra même enlever entièrement la plaque de verre, et l'image, loin de cesser d'être visible, n'en deviendra que plus nette, et fera la même illusion qu'un objet réel.

332. — L'on peut examiner l'image sur le verre dépoli à la loupe ou au microscope : elle paraîtra alors comme une miniature délicate, et suivra toutes les aspérités de la surface. Mais si l'on enlève le verre dépoli en continuant à regarder l'image, elle restera suspendue en l'air, et les objets semble-

ront se rapprocher de l'œil en grossissant : en un mot, il se forme alors un véritable télescope dioptrique.

333. — Si l'on s'est servi, pour former l'image, d'une lentille concave ou d'un réflecteur convexe, comme dans les fig. 64 et 65, les rayons réfractés ou réfléchis iront en divergeant, non à partir de leurs points de croisement actuels, mais à partir des points où se croiseraient leurs prolongements derrière le réflecteur ou devant la lentille. Dans ce cas, il ne se forme point d'image réelle que l'on puisse recevoir sur un écran, mais seulement ce qu'on appelle une *image virtuelle* que l'on peut observer à l'œil nu ou armé d'une loupe : cette image, se trouvant du même côté que l'objet pour une lentille, et du côté opposé pour un réflecteur, ne subit aucun renversement.

334. — La perfection de l'image produite par une lentille ou un réflecteur, sa parfaite ressemblance avec l'objet, et sa netteté, dépendront de la convergence plus ou moins exacte de tous les rayons du faisceau émané de chaque point physique de l'objet, et de leur réunion en un seul point *mathématique* ou approchant le plus possible de cette précision rigoureuse. Si l'on a fait usage d'une lentille d'un diamètre trop considérable, surtout si les courbures des surfaces sont mal choisies et produisent une forte aberration, l'image sera confuse; car chaque point de l'objet formera, non un autre point, mais une petite tache circulaire dans l'image; et, comme toutes ces taches se couvriront en partie, il n'y aura plus aucune netteté.

Pour obtenir des images parfaites, la destruction de l'aberration est donc de rigueur; quelques irrégularités dans la figure des surfaces de la lentille ou du réflecteur, quelques défauts dans la matière même dont ils sont formés, suffisent pour jeter les rayons hors de leur direction géométrique et pour rendre les images confuses. Il y a donc trois points principaux que l'on doit tâcher d'atteindre dans la forma-

tion des images optiques : 1° le poli parfait des surfaces; 2° la parfaite homogénéité des matières employées; 3° la stricte conformité des surfaces réfléchissantes ou réfractantes avec les figures de la géométrie et les résultats de l'analyse.

335. — Il est un cas où les aberrations de toute espèce sont rigoureusement détruites et où l'image est parfaite : c'est lorsque les rayons sont réfléchis par un plan. En effet (fig. 66), si PQ est un objet placé devant le réflecteur plan AB, et si l'on abaisse de chaque point de l'objet des perpendiculaires sur la surface; que, de l'autre côté, l'on prenne sur ces perpendiculaires des points tels que p, q, respectivement à la même distance du plan que P et Q, la suite de ces points formera l'image.

Nous avons vu d'ailleurs que tous les rayons venant de P et réfléchis par AB iront diverger rigoureusement à partir de l'image : ainsi cette image sera tout-à-fait exempte d'aberration, et paraîtra comme un objet réel derrière le réflecteur, si l'œil se trouve placé de manière à recevoir les rayons réfléchis.

336. — *Corollaire.* L'image formée par un réflecteur plan est égale à l'objet, et les lignes correspondantes sont également inclinées sur la surface réfléchissante. Un miroir ordinaire suffit pour s'en convaincre.

Problème.

337. — Déterminer l'image d'un objet formée par une surface réfractante plane.

Soit BC (fig. 67) la surface, PQ l'objet; d'un point Q quelconque menons QC perpendiculaire à la surface. L'on peut regarder la surface comme une sphère d'un rayon infini, d'où R, sa courbure $= 0$; et l'équation

$$f = (1 - m) R + m D$$

devient simplement

$$f = m\,D.$$

Comme

$$f = \frac{1}{C\,q},\ D = \frac{1}{C\,Q},\ \text{et}\ m = \frac{1}{\mu},$$

ce résultat, exprimé géométriquement, donne

$$C\,q = \mu \times C\,Q,$$

μ étant l'indice de réfraction.

338. — Dans le cas de la figure, la réfraction se fait d'un milieu plus dense dans un milieu plus rare, l'objet étant plongé dans un milieu plns dense (dans l'eau), et l'œil du spectateur dans un milieu plus rare (dans l'air) : l'image q du point Q est par conséquent plus près de la surface que Q, parce que, dans ce cas, $\mu < 1$. Il en est de même des autres points de l'image; de manière que l'objet entier paraîtra s'élever par l'effet de la réfraction, comme dans cette expérience si connue où l'on place une pièce de monnaie dans un vase vide, en reculant l'œil jusqu'à ce que la pièce soit cachée par le bord. Si l'on remplit le vase avec de l'eau, la pièce reparaîtra à l'instant et semblera s'élever. D'un autre côté, pour un œil plongé dans l'eau, les objets extérieurs paraîtront plus loin qu'ils ne sont réellement.

339. — *Coroll.* 1. L'image d'une ligne droite PQ dans l'objet est aussi une ligne droite dans l'image; mais son inclinaison sur la surface est moindre si la réfraction a lieu d'un milieu plus dense dans un plus rare : ainsi, le bâton D A P Q étant plongé en partie dans l'eau, la partie immergée A Q forme l'image A q moins inclinée que A Q. De sorte que, pour un spectateur placé hors de l'eau, le bâton paraîtra rompu et relevé en A. Ce phénomène est connu de tout le monde.

340. — Néanmoins, dans la réfraction sur une surface

plane, les rayons ne sont pas rigoureusement divergents ou convergents par rapport à un point. Le résultat trouvé plus haut n'est exact que pour des rayons incidents presque perpendiculaires à la surface; et nous sommes ainsi conduits à considérer les effets de la vision oblique par rapport à des surfaces réfractantes ou à des réflecteurs d'une figure quelconque.

341. — L'œil *voit* par les rayons qui viennent le frapper, et il juge de l'existence d'un objet quand les rayons émanent d'un certain point de l'espace en divergeant. Si cette divergence est rigoureuse, l'œil est irrésistiblement porté à croire qu'il existe un objet en ce point, quoique l'expérience et le raisonnement l'avertissent du contraire : l'illusion est complète et la vision parfaite. Mais quand cette divergence n'est qu'approchée, comme il arrive lorsque les rayons qui viennent à l'œil dans une direction sont beaucoup plus denses que ceux qui viennent dans des directions adjacentes, la vision sera toujours moins distincte en raison du degré de déviation qu'auront éprouvé les rayons qui la produisent, par rapport à la divergence mathématique.

Soit maintenant Q un point lumineux dans une position quelconque par rapport à la surface réfractante ou réfléchissante A C B (fig. 68), et A q F B la caustique formée par les intersections successives de tous les rayons réfractés ou réfléchis. Supposant l'œil en E, menons E q tangente à la caustique, que nous prolongerons jusqu'à la surface C, et joignons C et Q. Il est évident alors que le faisceau très mince Q C, divergeant du point Q, aura son foyer en q (art. 134, etc.); d'où il divergera ensuite, et tombera sur l'œil en E, à peu près comme s'il venait d'un point mathématique. Il résulte de ce qui a été dit aux art. 161 et 162 que la densité des rayons dans le cône q E est infiniment plus grande que dans tout autre cône adjacent ayant l'œil pour base ; de manière que q sera une image plus ou moins confuse de Q, selon le degré de courbure de la caustique en q. En effet, il

est évident que, si la courbure est grande, l'hypothèse de la concentration d'un faisceau Q C C' en un point mathématique s'écartera beaucoup moins de la vérité que si la caustique approche de la ligne droite.

342. — *Coroll.* 2. L'œil changeant de place, le lieu apparent d'un objet vu par réflexion ou par réfraction en change également : car le changement de position de E déterminant celui de la tangente Eq sur la caustique, le point q, ou le lieu de l'image, se déplace également.

343. — Nous sommes journellement témoins d'un fait qui vient confirmer cette doctrine. Si nous regardons le fond uni et horizontal d'une eau tranquille et peu profonde, nous le verrons s'élever de toutes parts, et s'approcher d'autant plus de la surface que nous le regarderons plus obliquement.

Pour expliquer cette apparence, soit Q un point du fond, et Q P e la route que suit le faisceau de rayons qui frappe l'œil placé en e (fig. 39) ou le rayon visuel. Le point où le prolongement de e P vient toucher la caustique est Y ; et, d'après la forme de la caustique D Y B (voy. art. 238), il est clair que Y est d'autant plus rapproché de la surface que eP est plus oblique. La figure apparente du fond pourra par conséquent être déterminée de la manière suivante. De l'œil E (fig. 69), menons une droite quelconque E G au point G de la surface, et P Y parallèle à E G, qui touche en Y la branche D Y B de la caustique, en regardant Q situé verticalement au-dessous de E comme le point rayonnant vu en Y. Prolongeons ensuite E G jusqu'en H, en faisant G H = P Y, et H sera l'image du point Q' qui appartient au fond, et se trouvera sur la caustique D' H B'. Le lieu de H ou la forme apparente du fond sera la ligne D F H ayant une courbure circulaire en D, un point d'inflexion en F et une asymptote C G K coïncidant avec la surface.

344. — Mais, pour en revenir aux images formées par des

rayons incidents très peu obliques et presque centraux, il convient de retenir les règles suivantes, qui servent à déterminer leurs places, grandeurs et lieux apparents, dans tous les cas relatifs aux surfaces sphériques. La démonstration en devient superflue si l'on se rappelle les articles précédents.

345. — *Première règle.* Toute image formée ou près d'être formée par des rayons convergents, ou émettant des rayons divergents, peut être considérée comme un objet.

346. — *Deuxième règle.* Pour des réflecteurs sphériques (fig. 16), l'objet et son image sont du même côté du foyer principal : ils se meuvent en sens contraires, et se rencontrent au centre et à la surface du réflecteur. La distance de l'image au foyer principal et au centre s'obtient par cette proportion :

$$QF : FE :: EF : Fq :: QE : Cq.$$

L'image est droite quand l'objet et la surface sont du même côté du foyer principal; mais elle est renversée quand le foyer se trouve entre eux. Les grandeurs absolues de l'objet et de l'image dépendent de leurs distances au centre. Leur grandeur relative est donnée par la proportion

L'objet : l'image :: QF : FE,

:: la distance de l'objet au foyer principal : la longueur focale du réflecteur.

347. — *Troisième règle.* Pour des lentilles très minces de toute espèce, Q étant la place de l'objet, q son image, E le centre de la lentille, F le foyer principal des rayons incidents venant en directions opposées, l'objet et l'image seront du même côté ou des deux côtés de la lentille, suivant que l'objet et la lentille se trouveront du même côté ou de

côtés opposés par rapport au foyer principal F. Dans le premier cas, l'image sera droite ; dans le second, elle sera renversée. Les distances entre l'image et la lentille, et entre l'image et l'objet, sont données par les proportions

$$QF : FE :: QE : Cq, \quad QF : FE :: FE : Fq,$$

et la grandeur de l'objet est à celle de l'image comme la distance de l'objet au point F est à la distance focale, ou comme QF : FE.

348. — *Quatrième règle*. Dans toutes les combinaisons de surfaces réfléchissantes ou de lentilles, l'image formée par la première est regardée comme un objet dont l'image est formée ensuite par la seconde, et ainsi de suite jusqu'à la dernière.

349. — Nous avons déjà remarqué (art. 6) que les objets visibles diffèrent des images optiques en ce que celles-ci n'émettent la lumière que dans certaines directions, tandis qu'elle émane des corps dans tous les sens. Cette distinction est de la plus haute importance dans la pratique. Un objet réel est visible chaque fois qu'il n'y a point de corps opaque interposé entre l'œil et lui. Pour voir une image, il faut que l'œil soit placé dans la direction du faisceau de rayons qui y aboutit en convergeant ou en divergeant.

Ainsi, dans le cas de la fig. 62, si l'œil ne se trouve pas dans l'espace Dqp H, il ne verra rien de l'image, BqD et ApH étant les rayons extrêmes réfractés par la lentille et partis des extrémités de l'objet.

La clarté d'une image dépend évidemment de la quantité de lumière concentrée en chaque point. En n'ayant pas égard aux effets de l'aberration, cette clarté est donc proportionnelle à la grandeur apparente du miroir ou de la lentille par rapport à l'objet, multipliée par l'aire de l'objet et divisée par l'aire de l'image.

D'ailleurs,

L'aire de l'objet : celle de l'image :: (distance)^2 de l'objet à la lentille : (distance)^2 de l'image à la lentille :

et, puisque la grandeur apparente de la lentille vue de l'objet est proportionnelle au $\left(\frac{\text{diamètre de la lentille}}{\text{sa distance de l'objet}}\right)^2$, la clarté ou le degré d'éclairement de l'image ne dépend que de la grandeur apparente de la lentille vue de l'image, quel que soit d'ailleurs l'éloignement de l'objet. Comme cette quantité est toujours beaucoup moindre qu'un hémisphère, l'image est toujours moins éclairée que l'objet, même en ne supposant aucune perte de lumière par la réflexion ou la réfraction. C'est ce qui arriverait si l'image était reçue par un écran qui réfléchirait tous les rayons, ou par un œil dont la pupille serait assez grande pour recueillir tous les rayons qui se croisent pour former l'image. A plus forte raison la clarté de l'image doit-elle être moindre que celle de l'objet quand l'œil ne reçoit point tous les rayons. Ce raisonnement suppose que l'objet ait une grandeur sensible; mais, lorsque l'objet et son image ne sont que des points physiques, l'œil ne juge que de la lumière absolue, et la clarté de l'image est proportionnelle à la grandeur apparente de la lentille. Pour une étoile, par exemple, dont la distance est constante, la lumière absolue est simplement proportionnelle au carré de l'ouverture; et c'est pour cette raison que certaines étoiles sont visibles avec de grands télescopes, tandis que leur éclat est trop faible pour qu'on puisse les apercevoir avec des lunettes plus petites.

§ XII. — *De la structure de l'œil et de la vision.*

Description de l'œil. — Humeur aqueuse ; sa composition ; son pouvoir réfringent. — Cornée ; sa figure est un ellipsoïde de révolution. — Iris. — Cristallin ; sa figure ; son pouvoir réfringent. — Les axes de ses surfaces ne coïncident pas ; ce défaut de coïncidence ne nuit point à la vision. — Composition du cristallin ; il est plus dense au centre. — Rétine. — Choroïde. — Sclérotique. — Changement du foyer de l'œil pour des objets plus rapprochés. — L'image sur la rétine est l'objet immédiat de la vision. — Conformation vicieuse de la cornée. — Vision simple avec deux yeux. — Comment on peut rendre la vision double ; autre manière. — Un objet simple peut paraître, au toucher, double dans certains cas. — Preuve expérimentale que c'est l'habitude qui rend la vision simple. — Cause plus éloignée de l'unité de la vision. — Sympathie nerveuse. — Les objets paraissent droits quoique leur image soit renversée. — Punctum cæcum ; l'expérience démontre son existence. — Yeux des poissons. — Grossissement. — Grossissement d'un système de lentilles. — Angle visuel. — Vision à travers des lentilles convexes. — Vision à travers des lentilles concaves. — A l'aide de réflecteurs. — Principes généraux des télescopes. — Lunette astronomique. — Champ de la vision. — Formules relatives au champ de la vision et au grossissement. — Distance de l'œil. — Renversement des lunettes. — Lunette de Galilée. — Microscope. — Télescope catoptrique. — Télescope d'Herschel. — Télescope de Newton. — Télescope de Grégory. — Télescope de Cassegrain.

350. — C'est au moyen des images optiques que s'opère la vision. L'œil est un assemblage de lentilles qui concentrent les rayons émanés de chaque point de l'objet sur un tissu de nerfs très déliés, qu'on appelle la *rétine* : il s'y forme une image ou représentation exacte de l'objet, et c'est cette image qui est perçue ou *sentie* par la rétine.

La fig. 70 est une section de l'œil humain par un plan horizontal passant par son axe. La figure de cet organe est presque entièrement sphérique, mais il forme une saillie considérable par-devant : il se compose de trois *chambres* principales, occupées par des milieux d'une transparence parfaite et de pouvoirs réfringents qui diffèrent beaucoup entre eux, mais assez peu de celui de l'eau pure. Le premier de ces milieux, A, occupant la chambre antérieure, porte le nom d'*humeur aqueuse*, et n'est effectivement que de l'eau pure, contenant un peu de muriate de soude et de gélatine,

avec une légère trace d'albumen, dans une proportion qui n'excède pas 8 pour 100 (1).

D'après les expériences de M. Chossat (2), du docteur Brewster et du docteur Gordon (3), son indice de réfraction est presque exactement le même que celui de l'eau, la valeur de cet indice étant 1.337, tandis que pour l'eau elle est égale à 1.336. La partie antérieure de cette chambre est terminée par une enveloppe α de la nature de la corne et d'une transparence parfaite, qui porte le nom de *cornée*, et dont la figure est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe, ainsi que l'a démontré M. Chossat (4) par des mesures très précises et des expériences faites avec le plus grand soin. Cet axe, comme il est naturel de le croire, détermine celui de l'œil; mais il est à remarquer que, dans les yeux de bœuf mesurés par M. Chossat, son pôle ne coïncidait jamais avec le centre de l'ouverture de la cornée, mais qu'il s'en trouvait à 10° environ (comptés sur la surface), à partir de ce centre vers le nez, dans un plan horizontal. Le rapport du demi-grand axe de l'ellipse génératrice à l'excentricité étant 1.3, valeur qui s'écarte peu de l'indice de réfraction = 1.337, il résulte de ce qui a été démontré à l'art. 236 que les rayons parallèles qui tombent sur la cornée, dans la direction de son axe, convergent vers un foyer intérieur, avec une exactitude presque mathématique, l'aberration à laquelle eût été sujette une cornée sphérique étant presque entièrement détruite.

351. — La surface postérieure de la chambre A est limitée par l'*iris* $\beta\gamma$, qui est une espèce d'écran circulaire opaque ou de diaphragme composé de fibres musculaires dont la

(1) Chenevix, *Transactions philosophiques*, vol. XCIII, p. 195.
(2) Bulletin de la société philomatique, 1818, p. 94.
(3) Edinburg Philosophical Journal, vol. 1, p. 42.
(4) Sur la courbure des milieux réfringents de l'œil chez le bœuf. *Annales de chimie*, vol. X, p. 337.

contraction ou l'extension, suivant l'intensité de la lumière, détermine le rétrécissement ou la dilatation d'une ouverture qui en occupe le centre, et que l'on nomme la *pupille*. Quand la lumière est très vive, la pupille de l'œil humain se rétrécit au point de ne pas excéder o . 12 de pouce, tandis qu'une clarté plus faible le dilate jusqu'à o . 25 (1), c'est-à-dire jusqu'au double de l'ouverture précédente. Cette membrane sert évidemment à modérer et à rendre plus uniforme le degré d'éclairement de l'image sur la rétine, pour ménager la sensibilité de ce tissu.

Chez les animaux tels que les chats, qui voient dans l'obscurité, la pupille se ferme presque totalement pendant le jour, et se réduit à une fente très étroite; mais, dans l'œil humain, son ouverture est toujours circulaire. La contraction de la pupille est involontaire, et s'opère par le *stimulus* de la lumière même. Il est curieux d'observer ces mouvements mécaniques de la pupille en approchant la flamme d'une chandelle pendant que l'œil regarde sa propre image dans un miroir.

352. — Immédiatement après la pupille, on trouve le *cristallin*, enfermé dans sa *capsule*, qui forme la paroi postérieure de la chambre A : sa figure est celle d'un solide de révolution, et sa face antérieure est beaucoup moins courbe que l'autre. Ces deux surfaces, selon M. Chossat, appartiennent à des ellipsoïdes de révolution autour de leurs *petits axes ;* mais ses expériences semblent prouver que les axes de ces deux surfaces ne coïncident pas exactement entre eux ni avec celui de la cornée. Cette déviation nuirait à la netteté de la vision si le cristallin différait considérablement en densité avec les autres lentilles, ou si toute la réfraction s'y faisait; mais il n'en est pas ainsi, car l'indice de réfraction de

(1) Leçons du docteur Young, sur le mécanisme de l'œil. *Transactions philosophiques*, vol. XCI.

cette lentille ne vaut que 1 . 384, tandis que celui de l'humeur aqueuse = 1 . 337, comme nous l'avons déjà vu, et que celui de l'*humeur vitrée* C qui occupe la troisième chambre = 1 . 339 : de manière que la déviation que subit le rayon à la surface du cristallin est très petite en comparaison de l'inclinaison de la surface au point où cette déviation a lieu, puisque près du sommet une déviation assez grande dans la direction de l'axe ne peut produire qu'un très léger changement dans l'inclinaison du rayon sur la surface. Ainsi cette cause d'erreur exerce une si faible influence qu'elle ne produit probablement aucune aberration appréciable.

353. — Le cristallin contient de l'albumen et de la gélatine dans une proportion beaucoup plus forte que toutes les autres humeurs de l'œil, à tel point qu'il est entièrement coagulable à la température de l'eau bouillante. Sa densité augmente un peu de la circonférence au centre, suivant le docteur Brewster et le docteur Gordon, les indices de réfraction au milieu de son épaisseur, du milieu de son épaisseur à sa surface, et à sa surface même, étant respectivement 1 . 3999, 1 . 3786 et 1 . 3767, l'indice de l'eau pure étant 1 . 3358. Cet accroissement de densité a visiblement pour but de corriger l'aberration en accourcissant le foyer des rayons voisins du centre, conformément aux règles prescrites à l'art. 299 pour reconnaître les effets de l'aberration.

Ce serait un beau problème d'analyse que de rechercher l'effet de l'ellipticité des surfaces; mais les bornes de cet ouvrage ne nous permettent pas de l'y faire entrer : cet effet est probablement de corriger l'aberration des pinceaux obliques.

354. — La chambre postérieure C est occupée par l'*humeur vitrée*, qui, selon Chenevix, ne diffère pas sensiblement, ni en pesanteur spécifique ni en composition chimique, de l'humeur aqueuse : son indice de réfraction ne surpasse que

d'une quantité très petite celui de cette dernière humeur, comme nous l'avons déjà dit plus haut.

355. — Le pouvoir réfringent du cristallin surpassant celui de l'humeur aqueuse et de l'humeur vitrée, les rayons qui tombent sur cette partie, en convergeant à partir de la cornée, deviennent encore plus convergents; et justement à leur dernier foyer se trouve la surface postérieure de la chambre qui contient l'humeur vitrée. Cette surface est couverte par la rétine *d*, qui consiste en un réseau (comme l'indique son nom) de nerfs excessivement déliés, et provenant tous d'un seul gros nerf O, nommé *nerf optique*, qui entre dans l'œil obliquement du fond de l'orbite, près du nez. La rétine garnit toute la cavité de C jusqu'à *i*, où commence le cristallin. Les nerfs sont en contact avec le *pigmentum nigrum*, où ils sont plongés. Cette dernière substance est noire et d'une apparence veloutée; elle recouvre la membrane choroïde *g*, et sert à absorber et à éteindre la lumière qui entre dans l'œil dès qu'elle a produit son effet excitant sur la rétine : elle prévient ainsi toute réflexion interne qui rendrait la vision confuse. Toutes ces humeurs et membranes sont enveloppées d'une tunique dure et épaisse nommée la *sclérotique*, qui s'unit à la cornée, et forme ce qu'on nomme communément *le blanc de l'œil.*

356. — Telle est la disposition qui amène sur la rétine le foyer de rayons parallèles ou émanant d'objets très éloignés. Mais comme nous devons voir les objets de près comme de loin, et que le foyer d'une lentille ou d'un système de lentilles est plus long pour des objets rapprochés que pour d'autres plus éloignés, il est évident que l'œil doit être doué d'une force régulatrice qui éloigne la rétine de la cornée et allonge l'œil dans la direction de son axe, ou qui modifie la courbure des lentilles de cet organe de manière à augmenter la convergence des rayons. Nous sommes convaincus de

l'existence de cette force qui s'exerce au gré de notre volonté et par un effort musculaire qui, long-temps continué, produit la fatigue et ne peut s'exercer que jusqu'à un certain point.

Cependant les anatomistes et les physiciens sont partagés d'opinion sur le mécanisme à l'aide duquel s'opère ce changement dans la forme de l'œil : quelques uns prétendent que les muscles, appelés *droits*, qui font mouvoir l'œil dans son orbite produisent, en se contractant simultanément, une pression sur les fluides intérieurs, et font ressortir la cornée, en augmentant à la fois et sa convexité et sa distance de la rétine.

Cette opinion a été défendue par le docteur Olbers; Ramsden et sir E. Home ont même voulu en faire la base d'une théorie de la vision; mais elle a été combattue par le docteur Young, dont les expériences prouvent du moins, d'une manière décisive, que l'accroissement de la convexité de la cornée a très peu ou point d'influence sur l'accourcissement du foyer.

Il est difficile de concevoir que l'œil, sphérique comme il est et plein de fluides, puisse s'allonger sans danger, par l'effet d'une pression, au point de rendre la vision distincte à trois pouces de l'œil, distance la plus petite à laquelle des yeux ordinaires voient distinctement. Il faudrait, dans ce cas, que le globe de l'œil prît la forme d'un ellipsoïde dont le grand axe fût plus long d'un septième que dans son état ordinaire : une telle extension semble incompatible avec la force et la dureté de la sclérotique. Une autre opinion a été défendue avec le plus grand succès par l'excellent physicien que nous venons de citer : c'est que le cristallin même est susceptible de changer de forme et de devenir plus convexe quand il s'agit de voir à de petites distances. Ses expériences sur des personnes privées de cette lentille sont bien près de prouver l'impossibilité du changement de foyer dans ce cas, quoique la contraction de l'iris y obvie, jusqu'à un certain point, en diminuant le diamètre du pinceau, et par consé-

quent l'espace de la rétine sur lequel se répandent les rayons imparfaitement convergents, ce qui remédie un peu à ce défaut de convergence. Si nous considérons maintenant que le cristallin est d'une structure fibreuse régulière, comme on le voit souvent en ouvrant l'œil d'un poisson bouilli; qu'il est composé de couches concentriques comme les écailles d'un oignon, et que chaque couche consiste en un tissu de fibres musculaires aboutissant à deux pôles, comme les méridiens d'une sphère dont l'axe serait celui de l'œil même, la structure musculaire du cristallin nous paraîtra suffisamment démontrée; et, quand même elle ne le serait pas, l'hypothèse d'un pouvoir musculaire qui résiderait dans le cristallin, malgré l'absence des nerfs, serait aisément justifiée par l'analogie avec certains animaux transparents chez qui l'on n'aperçoit aucune fibre musculaire, et qui cependant jouissent de la faculté de se mouvoir et d'obéir au stimulus nerveux, quoiqu'ils n'aient pas plus de nerfs que de muscles.

En résumé, il faut convenir que la présomption est en faveur du docteur Young, quoique les causes accessoires dont nous avons déjà parlé puissent concourir, jusqu'à un certain point, à produire l'effet en question, et que l'on doive regarder le problème comme susceptible d'une solution plus complète. La science peut justement s'enorgueillir d'avoir poussé si loin l'explication du mécanisme de cet admirable organe, et elle n'a point à rougir si quelque chose échappe encore à ses recherches. Que les anatomistes et les physiologistes disputent sur quelques points de la structure ou du mode d'action de l'œil, toujours est-il certain que, dans ce que nous en connaissons, il y a une telle analogie avec les produits de l'art, malgré l'infériorité de ceux-ci, une intelligence et une prévoyance si admirables, un emploi si judicieux des propriétés des agents naturels considérés comme de purs instruments, que nous sommes forcés d'y reconnaître un choix délibéré, plus manifeste peut-être que dans tout ce que nous pourrons découvrir jamais, soit dans l'art, soit dans la nature. Nous devons donc regarder l'étude du

phénomène de la vision comme digne du plus haut intérêt.

357. — Les images des objets extérieurs se peignent naturellement sur la rétine dans une situation renversée, et l'on peut les y observer en ôtant l'enveloppe postérieure de l'œil d'un animal nouvellement tué, et en exposant la rétine avec la choroïde, qui la recouvre par-derrière, aux rayons incidents, comme l'écran de verre dépoli mentionné à l'art. 331. C'est cette image *seule* qui est *sentie* par les nerfs de la rétine, stimulée par l'action de la lumière; et de là les impressions sont transmises au sensorium par les nerfs optiques, d'une manière qui doit être mise au nombre des plus profonds mystères de la physiologie, mais qui semble ne différer aucunement du mode de transmission propre aux autres sens. Ainsi une paralysie du nerf optique produit pendant toute sa durée une cécité complète, quoique l'œil reste ouvert et que les lentilles conservent leur transparence. L'on attribue plusieurs cas très curieux de cécité imparfaite à ce que certains nerfs étaient affectés, tandis que les autres demeuraient intacts (1). D'ailleurs, aussi long-temps que les nerfs conservent leur sensibilité, le degré de perfection de la vision est proportionné à celui de l'image sur la rétine. Dans le cas d'une cataracte, le cristallin qui a perdu sa transparence empêche la lumière d'atteindre la rétine ou de l'atteindre dans l'état de concentration convenable, et la lumière est arrêtée ou dispersée par les taches opaques ou semi-opaques qu'elle rencontre sur son passage : l'image est alors ou tout-à-fait nulle ou obscure et confuse, et la cécité qui en résulte plus ou moins complète. Si l'on extrait cette lentille opaque, la perception de la lumière revient entièrement; mais la cause principale de la convergence étant en-

(1) Wollaston, sur une semi-décussation des nerfs optiques. *Transactions philosophiques*, 1824.

levée, l'image, au lieu de se peindre sur la rétine, ne peut se former que bien loin derrière ce tissu, et les rayons, manquant de convergence au moment de l'atteindre, ne produisent qu'une image irrégulière, et par conséquent une vision imparfaite.

Mais si l'on donne aux rayons, avant qu'ils n'entrent dans l'œil, le degré de convergence nécessaire à l'aide d'une lentille convexe qui permette aux autres lentilles d'opérer cette convergence exactement sur la rétine, la netteté de la vision sera rétablie : c'est pour cette raison que les personnes qui ont subi l'opération de la cataracte, qui consiste dans l'extraction totale ou dans le déplacement du cristallin devenu opaque, sont obligées de se servir de verres dont le foyer est extrêmement court; ces verres font l'effet d'un cristallin artificiel. La vieillesse produit, à l'égard de la vision, le même défaut que l'ablation du cristallin, et l'on y obvie de la même manière. Chez les personnes âgées, la surface extérieure et transparente de l'œil, nommée la *cornée*, perd de sa convexité, le *pouvoir* de l'œil s'affaiblit (art. 248 et 255) et les images deviennent moins nettes : l'on supplée alors au défaut de pouvoir, au moyen d'une *loupe* ou lentille convexe (art. 268) qui rend la vision parfaite, ou au moins beaucoup meilleure.

558. — Les personnes qui ont la vue basse ont, au contraire, la cornée trop convexe; et l'on peut également remédier à ce défaut en faisant usage de lentilles concaves. Il y a des cas, cependant, quoique très rares, où la cornée est tellement proéminente qu'il est impossible de trouver des lentilles assez concaves pour détruire l'excès de convergence qui en résulte. Une cécité incurable eût été la suite de ce défaut de conformation, si une heureuse audace que la certitude de nos connaissances relativement aux lois de la vision peut seule justifier n'eût suggéré l'idée d'ouvrir l'œil, quoique parfaitement sain, et de reculer le cristallin.

359. — Ces défauts dans la vision, dus à la structure de l'organe, ne sont pas les seuls auxquels l'art puisse porter remède. Des vices de conformation dans la cornée sont beaucoup plus communs qu'on ne le pense généralement, à tel point même que peu d'yeux en sont exempts : on peut s'en apercevoir en fermant un œil, et en dirigeant l'autre vers un objet lumineux sans être trop éclatant, étroit, et dont les contours sont bien tranchés, puis en tournant ensuite la tête de divers côtés. Les cornes de la lune, quand elle ne commence à croître que depuis deux ou trois jours, sont très propres à cette expérience : l'objet paraîtra double, triple, etc., ou singulièrement contourné, et l'observation attentive de ces apparences fera connaître le vice de conformation qui les produit et les moyens d'y remédier.

M. G.-B. Airy a rapporté dernièrement, dans les *Transactions de la société philosophique de Cambridge*, une observation remarquable qu'il avait faite sur un de ses propres yeux : il s'assura que, par suite d'une irrégularité dans la figure des lentilles de cet œil, le foyer des rayons dans un plan vertical était plus court que celui des rayons horizontaux. Il est évident que l'on ne pouvait, par de simples verres convexes, corriger un semblable défaut, qui rendait l'œil absolument inutile : la méthode la plus exacte, en pareil cas, serait d'employer une lentille de même pouvoir réfringent que l'œil, dont la surface antérieure serait parfaitement sphérique et de même rayon que la cornée, tandis que la surface du côté de l'œil offrirait en creux un *fac-simile* exact de toutes les irrégularités de la cornée. Il est clair, en effet, que tous les écarts des rayons à la surface postérieure du verre seraient corrigés par les écarts égaux et opposés qu'ils éprouveraient en tombant sur la cornée (1); mais la néces-

(1) Dans certains cas de conformation vicieuse de la cornée, il serait intéressant d'examiner si quelque gelée animale transparente mise en contact avec cette tunique, et contenue par une capsule de verre, ne pourrait pas rendre la vision distincte, ou s'il ne serait pas possible d'a-

sité de n'employer pour ces lentilles de correction que des courbures que l'on puisse donner aisément aux verres, c'est-à-dire des plans, des sphères et des cylindres, a suggéré à M. Airy l'ingénieuse idée d'une lentille bi-concave dont une des surfaces serait sphérique et l'autre cylindrique : la lentille sphérique aurait pour but de corriger l'excès de convexité de la cornée; l'usage de la lentille cylindrique peut s'expliquer de la manière suivante :

Supposons des rayons parallèles qui tombent sur la surface cylindrique A B E D, perpendiculairement à son axe, comme dans la fig. 71, et soit S S′ P P′ Q Q′ T T′ un faisceau de ces rayons formant un parallélipipède infiniment mince, dont les faces sont parallèles à l'axe : l'un quelconque des rayons S P, S P′, dans le plan A P S perpendiculaire à l'axe, ira, par l'effet de la réfraction, converger ou diverger par rapport à un certain point X dans le même plan; et par conséquent, après la réfraction, tous les rayons qui tomberont sur P Q, P′ Q′, auront leur foyer sur la ligne X Y faisant partie de la surface caustique A F G D, et le foyer principal du cylindre sera la ligne F G, dont la distance F C au sommet de la surface égalera la longueur focale de la sphère engendrée par la révolution de A B autour de F C pris pour axe.

Ainsi une lentille cylindrique ne produit aucune convergence ou divergence à l'égard des rayons parallèles incidents dans le sens de son axe, tandis qu'elle fait converger ou diverger les rayons contenus dans des plans perpendiculaires à ce même axe, avec le même pouvoir qu'une sphère de même rayon. Si l'on unit donc une surface cylindrique avec un segment sphérique, le foyer de ce segment restera le même par rapport à l'un des plans; mais, par rapport à l'autre, le foyer de l'assemblage sera celui de deux surfaces sphériques

---

voir directement une empreinte de la cornée, que l'on reproduirait ensuite en l'imprimant sur quelque milieu transparent. L'opération serait délicate, mais beaucoup moins cependant que d'ouvrir un œil vivant et d'en extraire le cristallin.

dont la première aurait la courbure du segment et la seconde celle du cylindre. Une semblable lentille cylindro-sphérique placée devant l'œil mal conformé apportera du moins une amélioration sensible dans le sens de la vue.

Nous ne saurions mieux terminer ce que nous avons à dire sur cette intéressante application des mathématiques, qu'en rapportant les propres paroles de M. Airy :

« Après m'être adressé inutilement à plusieurs artistes, j'ai « trouvé enfin un certain M. Fuller, à Ipswich, qui m'a four- « ni une lentille telle que je la désirais (1). J'en suis pleine- « ment satisfait : je peux lire maintenant le plus petit carac- « tère avec l'œil gauche (l'œil mal conformé) aussi bien « qu'avec l'œil droit, même à une grande distance. J'ai « trouvé que la vision est plus distincte quand la surface cy- « lindrique est à une certaine distance de l'œil; et, comme « cet éloignement altère la forme des objets en réfractant « différemment les rayons situés dans des plans différents, « j'ai fait construire mes besicles de manière à pouvoir en « appliquer les verres presque contre l'œil : au moyen de « cette disposition, j'ai reconnu que l'œil dont je craignais « déjà de perdre l'usage pouvait me rendre presque autant « de services que l'autre. »

360. — La cécité totale ou partielle peut avoir pour cause non seulement l'opacité du cristallin, mais encore un corps quelconque étranger aux humeurs de l'œil et interposé entre la cornée et la rétine. En pareil cas, aussi long-temps que la sensibilité des nerfs n'a point été offensée, il ne faut jamais désespérer de recouvrer la vue. Les *Transactions philosophiques pour* 1826 rapportent une cure remarquable opérée par M. Wardrop sur un aveugle de naissance dont la pupille se trouvait complétement oblitérée par une contraction de

(1) Le rayon de la surface sphérique = $3 \frac{1}{3}$ pouces, celui du cylindre = $4 \frac{1}{2}$.

l'iris due à une opération mal faite, lorsque la personne n'était âgée que de six mois : il suffit, pour lui rendre la vue, dont elle avait été privée pendant quarante-six ans, de perforer la membrane qui fermait le passage à la lumière. Les détails de cette cure sont extrêmement intéressants : le lecteur les trouvera dans le volume des *Transactions philosophiques* que nous venons de citer, et auquel nous sommes forcé de le renvoyer.

361. — Comme nous avons deux yeux, et qu'il se forme dans chacun une image de chaque objet extérieur, on peut se demander *pourquoi l'on ne voit pas double.* La question a paru même très embarrassante à quelques auteurs. Quant à nous, il nous semble qu'on pourrait demander, avec la même raison, *pourquoi*, avec deux mains et dix doigts doués d'une égale sensibilité et aptitude à reconnaître les objets, *le toucher n'est point décuple.* La réponse est la même pour les deux cas : c'est l'effet de l'habitude. L'habitude seule nous apprend que les sensations de la vue se rapportent aux objets extérieurs et à quel objet en particulier. Un objet quelconque, une petite boule, par exemple, ou un pain à cacheter, est placé devant nous sur une table : nous dirigeons nos yeux vers cet objet, c'est-à-dire que nous en amenons les images sur la partie des deux rétines que nous savons, par l'habitude, être les plus sensibles et dans la situation la plus favorable pour voir distinctement. Comme l'expérience nous apprend aussi que, dans ces circonstances, la sensation est due à un objet unique, l'idée de l'unité de l'objet s'associe irrésistiblement à la sensation ; mais si l'on abaisse un œil, en pressant avec le doigt sur la paupière, sans cesser de regarder la boule, cette pression transportera nécessairement l'image sur un autre point de la rétine de cet œil, et la vision deviendra double à l'instant même : l'on verra distinctement deux boules, qui s'éloigneront à mesure que la pression augmentera, et qui se confondront dès qu'elle aura cessé. L'on peut obtenir le même effet sans presser l'œil, en dirigeant la vue vers un point

plus rapproché ou plus éloigné que la boule, les axes optiques ayant dans ce cas une direction autre que celle de l'objet. Quand les yeux sont dans un état de repos parfait, leurs axes sont ordinairement parallèles ou très peu divergents : tous les objets paraissent doubles alors ; mais la plns légère attention suffit pour confondre immédiatement leurs images. Un coup sur l'œil rend la vue double, jusqu'à ce que l'habitude fasse disparaître ce défaut, malgré la déviation de l'axe optique.

362. — Il en est exactement de même du sens du toucher : si l'on prend la boule et qu'on la manie, on est invinciblement convaincu de son unité; on persistera dans cette croyance si l'on place la boule entre l'index et le médius de la main droite, en laissant à ces doigts leur position naturelle, parce que nous sommes accoutumés à regarder comme appartenant à une même sphère des surfaces touchées de cette manière. Mais si l'on vient à croiser les doigts en mettant le médius sur l'index, et que l'on fasse rouler la boule sur la table dans l'angle de ces deux doigts, de telle manière que le côté gauche de la boule soit en contact avec le côté droit du médius, et *vice versa*, l'on sera également persuadé de l'existence de deux boules, surtout si l'on ferme les yeux et si l'on a fait placer ses doigts par un autre. Cette expérience réussit très bien avec un pois : en croisant les index des deux mains et plaçant le pois entre deux, on produit la même illusion.

363. — L'habitude a tellement le pouvoir de rendre la vision simple, qu'elle peut faire coïncider en apparence les deux images, lors même que les rayons qui produisent l'une d'elles sont détournés de leur direction primitive. Pour le démontrer, plaçons une chandelle à une certaine distance, et regardons-la directement avec un œil (le gauche, par exemple), en tenant l'autre derrière un prisme dont l'angle de réfringence est variable (nous décrirons plus tard cet instrument); faisons d'abord cet angle égal à zéro : le prisme

ne produira aucune déviation, et l'objet paraîtra simple. Faisons varier maintenant l'angle du prisme, jusqu'à ce que les rayons éprouvent une déviation de deux ou trois degrés vers la droite, dans un plan horizontal : la chandelle paraîtra double aussitôt, et l'on verra l'image détournée par le prisme, à gauche de l'autre; mais le plus léger mouvement, un simple clin-d'œil, les confondra à l'instant. En faisant croître l'angle du prisme de quelques degrés dans le même sens, la chandelle reparaîtra double, et deviendra encore une fois simple en clignant les yeux et en dirigeant plus fortement son attention sur la chandelle. L'on peut ainsi donner aux axes optiques une inclinaison réciproque de 20° ou 30°. Dans cet état de choses, si l'on place une seconde chandelle exactement dans la direction de l'image déviée de la première et qu'au moyen d'un écran l'on empêche ses rayons d'atteindre l'œil gauche, en enlevant subitement le prisme pendant le clignement d'yeux, les deux chandelles sembleront n'en faire plus qu'une. Si l'on fait dévier vers la droite l'image vue avec l'œil droit, la possibilité des coïncidences, devient beaucoup plus limitée, car il nous est plus naturel de rapprocher les axes optiques par un effort de l'imagination que de les écarter. Pour peu que la déviation se fasse hors du plan horizontal, la correction en devient impossible. Il est probable que certains cas de strabisme pourraient se guérir en s'exerçant, pendant un certain temps, à donner aux axes optiques la direction convenable.

364. — Cette explication de l'unité de la vision paraîtra sans doute suffisante; néanmoins, le docteur Wollaston suppose, avec raison, qu'une cause physiologique peut contribuer à produire cet effet, et qu'il se fait une semi-décussation des nerfs optiques au point même où ils quittent le cerveau, la moitié de chaque nerf se dirigeant vers un œil et l'autre moitié vers l'autre; de manière que la partie droite de chaque rétine est formée par les ramifications d'un seul nerf, et

la partie gauche par celles de l'autre. Toutes les images des objets hors de l'axe optique sont alors perçues par un seul nerf pour les deux yeux, ce qui maintient entre eux une puissante sympathie indépendante de toute habitude. Il est probable que les rameaux des deux nerfs se mêlent à l'axe optique même, pour rendre la vision plus sûre dans cette partie de l'œil.

365. — Une autre question, à laquelle on a donné beaucoup plus d'importance qu'elle n'en mérite, est de savoir pourquoi nous voyons les objets droits, tandis que leurs images se peignent renversées sur la rétine. Se tenir *droit* ne signifie autre chose qu'avoir la tête plus éloignée et les pieds plus près de la terre qu'aucune autre partie du corps : or la terre et tous les objets qu'elle porte gardent dans l'image sur la rétine la situation relative qu'ils ont dans la nature. Dans cette image, à la vérité, les hommes semblent avoir la tête en bas, mais aussi les corps pesants tombent de bas en haut. L'âme qui perçoit la sensation par le nerf qui occupe chaque partie de l'image juge seulement de la situation relative de ces parties entre elles; leurs rapports avec les objets externes ne sont connus que par l'expérience, et la promptitude du jugement que nous en portons est le résultat de l'habitude.

366. — Il est un fait remarquable que nous ne pouvons passer sous silence, quelque brieve que soit la théorie de la vision que nous exposons ici : c'est que le petit espace circulaire où le nerf optique entre dans l'œil est complétement insensible au stimulus de la lumière; propriété qui lui a fait donner le nom de *punctum cœcum*. La raison en est évidente : en ce point le nerf n'est pas encore divisé en une infinité de fibres assez déliées pour être ébranlées, ou pour éprouver quelque changement dans leur disposition mécanique ou chimique par un stimulus aussi faible que des rayons de lumière; néanmoins ce phénomène est curieux et surprenant. Sur une feuille de papier noir, ou tout autre fond de

couleur sombre, l'on place deux petits disques blancs dont les centres sont à trois pouces l'un de l'autre : on tient l'œil droit verticalement au-dessus du disque gauche, et à une distance d'environ douze pouces; de manière qu'en abaissant la vue, la droite qui joint les deux yeux soit parallèle à celle qui joint les centres des disques. Fermant alors l'œil gauche, et fixant l'autre sur le disque qui se trouve immédiatement au-dessous, on ne verra que celui-ci, et l'autre sera totalement invisible; mais pour peu qu'on le dérange de sa position vers la droite ou vers la gauche, il deviendra visible sur l'heure et semblera sortir du néant.

Les distances assignées plus haut peuvent varier légèrement pour différentes vues.

367. — On pourra trouver singulier qu'un phénomène si remarquable échappe à la plupart des hommes, tellement qu'il n'y en a peut-être pas un sur dix mille qui l'ait jamais observé. L'étonnement cessera bientôt lorsqu'on saura qu'il n'est pas très rare de trouver des personnes qui ont perdu l'usage d'un œil pendant un certain temps sans s'en apercevoir. L'auteur de cet ouvrage en a connu un exemple.

368. — Chez les poissons, les humeurs de l'œil ont à très peu près le même pouvoir réfringent que le milieu dans lequel ils vivent; la réfraction est très faible dans la cornée, et c'est presque uniquement le cristallin qui concentre les rayons en un foyer sur la rétine. Aussi cette lentille est-elle sensiblement sphérique, et d'un diamètre assez petit par rapport à celui de l'œil. De plus, l'aberration de sphéricité ne pouvant être détruite, dans ce cas, par la cornée seule, le cristallin même produit cet effet par l'accroissement rapide de sa densité vers le centre. (Brewster, *Dissertation sur de nouveaux instruments de physique*, p. 268.)

La structure fibreuse du cristallin et sa formation par couches s'observent parfaitement dans un œil de poisson, coagulé par l'ébullition.

369. — Les mêmes principes qui nous ont permis de remédier aux imperfections naturelles de la vue nous procureront encore les moyens d'en augmenter la puissance, même chez des individus qui jouissent de ce sens dans toute sa perfection. Dès que l'on conçoit que l'image peinte sur la rétine est celle que nous voyons effectivement, il s'ensuit que, si par un artifice quelconque l'on peut rendre cette image plus claire, plus grande, plus distincte que dans l'état naturel de l'organe, l'on verra les objets plus brillants et plus grands qu'ils ne paraissent d'ordinaire, et par conséquent susceptibles d'être examinés en détail, sous des formes mieux prononcées et avec un contour plus nettement terminé. Les moyens que nous fournit la science pour atteindre ce but sont : de recueillir, à l'aide de lentilles, un nombre de rayons plus grand que celui qui entre dans notre œil ; de rendre l'image plus grande sur la rétine, en substituant à l'objet une image plus grande ou plus rapprochée de l'œil que l'objet même, et de détruire l'aberration en donnant à nos instruments une figure convenable.

370. — *Théorème*. La grandeur apparente d'un objet rectiligne a pour mesure l'angle sous-tendu par cet objet au centre de l'œil, ou la grandeur de l'image sur la rétine, c'est-à-dire

$$\frac{\text{la grandeur de l'objet}}{\text{sa distance de l'œil}}.$$

Le centre de l'œil est, dans ce sens, un point très voisin du centre de la pupille dans le plan de l'iris. L'image pq (fig. 72) d'un objet extérieur PQ, étant formée au fond de l'œil par les rayons qui s'y croisent, doit sous-tendre le même angle que cet objet ; de manière que

$$pq = PQ \cdot \frac{pE}{PE}.$$

371. — *Corollaire*. Si l'objet est tellement éloigné que l'on

puisse regarder comme parallèles tous les rayons qui en émanent, le diamètre angulaire de l'objet est mesuré par l'inclinaison réciproque des faisceaux extrêmes. L'imagination reporte alors l'objet à une distance infinie ou à la voûte céleste.

372. — *Théorème*. Quand une lentille convexe se trouvera entre l'œil et un objet quelconque, en sorte que sa distance à cet objet égale sa longueur focale, celui-ci sera vu distinctement par tout œil capable de faire converger des rayons parallèles, et éprouvera un grossissement plus ou moins considérable.

Soit PQ l'objet (fig. 73), C la lentille et E le centre de l'œil. Puisque l'objet est au foyer de la lentille, les rayons divergents du faisceau émis par un point quelconque P de l'objet émergeront parallèlement à PE : après avoir été réfractés dans l'œil, ils iront donc converger sur la rétine en un point p, tel que Ep soit parallèle à PC.

Pareillement, les rayons partis de Q iront, par l'effet de la réfraction à travers la lentille et l'œil, converger vers q; de manière que Eq sera parallèle à Q C : il se formera ainsi sur la rétine en pq une image distincte, et la grandeur apparente de l'objet vu à travers la lentille sera l'angle qEp; mais cet angle égale PCQ ou l'angle sous-tendu par l'objet au centre de la lentille, et surpasse par conséquent PEQ ou l'angle sous-tendu par l'objet au centre de l'œil : tel est l'effet de l'interposition de la lentille.

373. — Ainsi plus l'œil sera près de la lentille, plus la différence sera petite entre les grandeurs apparentes des objets vus avec ou sans lentille; mais si le foyer du verre est plus court que la moindre distance à laquelle l'œil peut voir distinctement, il y aura cette différence essentielle entre la vision avec ou sans lentille, que, dans le premier cas, l'objet sera vu distinctement, et que sa forme sera bien terminée ; tandis que, dans l'autre, ou dans la vision à l'œil nu, son

image sera d'autant plus confuse qu'il sera plus près de l'œil.

374. — Au moyen d'une lentille convexe d'un court foyer, l'on peut donc voir les objets aussi distincts et aussi grands que l'on veut.

En effet, soit L le pouvoir ou la valeur inverse de la longueur focale, et D la plus petite distance à laquelle on puisse voir l'objet distinctement sans lentille, nous aurons

L : D :: l'angle pEq : l'angle sous-tendu par l'objet à la distance D,

et par conséquent

:: la grandeur apparente de l'objet vu à travers la lentille : la grandeur apparente de ce même objet vu à l'œil nu ;

$\frac{L}{D}$ est donc le rapport de ces grandeurs, ou ce qu'on appelle le *grossissement* ou *pouvoir amplifiant* de la lentille.

375. — *Corollaire*. D étant donné, le grossissement est proportionnel à L ou à $(\mu - 1)(R' - R'')$. Tout ce que nous avons démontré dans les paragraphes précédents, relativement aux *pouvoirs*, doit s'appliquer maintenant aux grossissements. La somme des pouvoirs amplifiants de deux lentilles convexes est le pouvoir amplifiant de leur combinaison. Si l'une d'elles est concave, son grossissement doit être considéré comme négatif, et il faut remplacer alors la somme par la différence.

Problème.

376. — Exprimer généralement l'*angle visuel* sous lequel est vu distinctement un petit objet placé à une distance quelconque de la lentille et de l'œil.

Soit PQ l'objet (fig. 74, 75, 76, 77), E la lentille, O l'œil, et pq l'image.

Posons

$$\frac{1}{EQ} = D, \quad \frac{1}{Eq} = f, \quad \frac{1}{EO} = e,$$

en comptant e dans le même sens que D et f, à partir du centre de la lentille. L'angle visuel sous lequel on voit l'image est qOp, et nous avons par conséquent

$$\text{l'angle visuel } (= A) = \frac{qp}{Oq} = \frac{qp}{OE - Eq}.$$

Mais

$$qp = QP \cdot \frac{Eq}{EQ} = QP \cdot \frac{D}{f} = O \cdot \frac{D}{f},$$

en écrivant O au lieu de QP, longueur de l'objet. De plus,

$$OE - Eq = \frac{1}{e} - \frac{1}{f} = \frac{f - e}{fe};$$

il vient donc

$$A = O \cdot \frac{D}{f} \cdot \frac{ef}{f - e} = O \cdot \frac{eD}{L + D - e},$$

L désignant toujours le pouvoir de la lentille.

Or O . D est l'angle visuel de l'objet vu du centre de la lentille : posant donc

$$O \cdot D \text{ ou } \frac{QP}{QE} = (A),$$

nous aurons

$$A = (A) \cdot \frac{e}{L + D - e} \quad \dots \quad (a)$$

377. — Si l'on regarde à travers une lentille concave, l'image se forme entre la lentille et l'objet : celui-ci paraît *droit* et *plus petit* qu'il n'est réellement, pourvu que l'œil et l'objet soient à la distance convenable pour que la vision soit distincte.

Dans ce cas, e est positif, et L et D sont tous deux négatifs : par conséquent $L + D - e$ est une quantité négative plus grande que e (en faisant abstraction du signe); d'où il suit que A est également négatif et moindre que (A).

378. — A l'égard des réflecteurs,

$$f = 2R - D,$$

et

$$A = (A) \cdot \frac{e}{2R - D - e} \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Pour un réflecteur convexe, e est nécessairement négatif, du moins si le réflecteur est métallique, parce que l'œil doit être du côté de la surface qui reçoit la lumière incidente : par conséquent $2R - e$ est positif, et $\frac{e}{2R - D - e}$ sera plus grand ou moindre que l'unité, suivant la valeur de $2R - D - e$.

Pour un réflecteur concave, R est négatif, et e l'est également comme pour le réflecteur convexe, et pour la même raison : le signe et la grandeur de A pourra donc varier indéfiniment, comme dans le cas précédent, avec la position de l'œil, de l'image et de l'objet. Les fig. 78 et 79 représentent ces différents cas.

379. — Au lieu de regarder directement l'image avec l'œil nu, on peut l'observer à l'aide d'une lentille ou d'un réflecteur, qui donne aux rayons divergents de chaque point de l'objet ou un parallélisme parfait, ou un degré de convergence ou de divergence qui permette à l'œil de voir l'image distinctement, et plus grande ou plus petite qu'elle ne paraîtrait sans ce secours.

Tel est le principe sur lequel repose la construction de tous

les télescopes et microscopes. Comme la plupart des yeux voient bien quand les rayons sont parallèles, ces instruments laissent aux faisceaux émergents le parallélisme qu'ils avaient avant leur incidence; de plus, au moyen d'une disposition mécanique qui permet de changer les distances entre les lentilles, l'on donne aux rayons tel degré de convergence ou de divergence que l'on juge convenable.

380. — Dans la lunette dioptrique ordinaire, ou, comme on l'appelle quelquefois, la *lunette astronomique,* l'image est formée d'abord par une lentille convexe nommée l'*objectif*, et vue à travers une autre lentille convexe nommée l'*oculaire,* placée à une distance de l'autre à peu près égale à la somme de leurs distances focales. Si l'oculaire est concave, l'instrument s'appelle *lunette de Galilée,* du nom de son inventeur. La situation des lentilles et la route des rayons sont représentées par les figures 80 et 81.

381. — Dans la première lunette, soit P Q l'objet; menons par les centres de l'objet et de l'oculaire la droite QOG, qui sera l'axe de l'instrument; d'un point quelconque R de l'objet, menons R O r passant par le centre O de l'objectif, et rencontrant en r la droite pq perpendiculaire à l'axe, au point q foyer de Q : pq sera l'image de P Q.

Soient P A, P B, les rayons extrêmes du faisceau divergeant du point P et tombant sur l'objectif : ces rayons se croiseront en p après leur réfraction. A moins que l'oculaire bGa ne soit assez grand pour recevoir le rayon Apa, le point p paraîtra donc moins éclairé que le point q au centre de l'objet; et, si l'objectif est tellement petit que la ligne Bp prolongée ne puisse l'atteindre, aucun des rayons émis de P ne parviendra à l'œil : ainsi le *champ de la vision* est limité par l'ouverture de l'oculaire.

Pour déterminer son étendue, joignons Bb et Aa, extrémités opposées de l'objet et de l'oculaire : ces droites ren-

contrant l'image en r et en p, et l'axe en X, rp est toute l'étendue visible de l'image, et l'angle $pOr = POR$ est l'étendue angulaire du champ de la vision : or nous avons

$$AB : ab :: OX : GX,$$

et par conséquent

$$AB + ab : AB :: OG : OX;$$

d'où l'on tire

$$OX = \frac{AB}{AB + ab} \cdot OG, \quad GX = \frac{ab}{AB + ab} \cdot OG.$$

D'ailleurs

$$Xq = Oq - OX, \quad pr = ab \cdot \frac{Xq}{GX},$$

et l'angle

$$rOp = \frac{rp}{Oq}.$$

Pour exprimer algébriquement ces relations, posons

Le diamètre de l'objectif $= \alpha$,
Le pouvoir de l'objectif $= L$,
Le diamètre de l'oculaire $= \beta$,
Le pouvoir de l'oculaire $= l$.

Nous aurons alors

$$\left.\begin{aligned} OX &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right), \quad GX = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{l}\right), \\ QX &= \frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta}{L}-\frac{\alpha}{l}\right), \quad pr = \frac{\beta l - \alpha L}{L + l}. \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Cette dernière équation donne la grandeur linéaire de la portion visible de l'image : elle est symétrique, comme on le voit, par rapport à l'oculaire et à l'objectif.

382. — Il est aisé maintenant d'assigner le champ et le pouvoir amplifiant d'une lunette.



Le premier est égal à l'angle sous-tendu par pr au centre de l'objectif, et le second se déduit du premier dès que l'on connaît l'angle rGp au centre de l'oculaire; or

$$\left.\begin{array}{l} rOp = L \cdot \dfrac{\beta l - \alpha L}{L + l}, \quad rGp = l \cdot \dfrac{\beta l - \alpha L}{L + l}: \\ \text{par conséquent,} \\ \quad \text{le pouvoir amplifiant} = \dfrac{rGp}{rOp} = \dfrac{l}{L}; \end{array}\right\} (d)$$

ce qui montre que le grossissement de la lunette est d'autant plus fort que le pouvoir de l'oculaire est plus grand par rapport à celui de l'objectif; ou, en d'autres termes, que la longueur focale de l'objectif est plus grande par rapport à celle de l'oculaire.

383. — Après la réfraction par l'oculaire, les rayons émergeront parallèlement, et seront vus distinctement si l'œil se trouve placé d'une manière convenable : l'œil recevra les deux rayons extrêmes bR' et aP' appartenants aux faisceaux émis de r et de p, s'il occupe leur point de concours E; mais, bE étant parallèle à rG, et aE à pG, l'on a

$$GE = Gq \times \frac{ab}{pr}, \text{ ou } GE = \frac{\beta(L+l)}{\beta l - \alpha L}. \quad . \quad (e)$$

384. — Si l'œil se trouve à une distance plus grande ou plus petite que GE, il ne recevra point les rayons extrêmes, et le *champ de la vision* ou l'aire visible de l'objet se resserrera. En construisant le tube qui porte l'oculaire, il est donc important de lui donner une longueur telle qu'en regardant par l'une de ses extrémités, l'œil se trouve précisément à la distance de l'oculaire que nous venons d'assigner.

385. — Si l'on retourne l'instrument, et qu'on applique l'œil contre l'objectif, il est évident qu'il pourra servir en-

core de lunette ; mais son pouvoir aura pour valeur $\frac{L}{l}$: de manière qu'au lieu de grossir les objets, il les fera paraître plus petits, et le champ de la vision croîtra dans la même proportion. Alors les objets éloignés seront vus en miniature.

386. — Si la lunette, au lieu d'être tournée vers des objets assez éloignés pour que les rayons qui en émanent puissent être regardés comme parallèles, était dirigée vers des objets voisins de l'œil, la distance entre l'objectif et l'oculaire devrait être augmentée jusqu'à ce que l'image fût amenée précisément au foyer de ce dernier verre. A cet effet, l'oculaire est ordinairement placé dans un tube que l'on fait glisser à volonté, soit avec la main, soit à l'aide d'un engrenage.

Le même mécanisme sert à donner à l'instrument la longueur qu'exige le besoin de l'œil : pour les presbytes, les rayons doivent être parallèles ou très peu divergents, ce qui exige qu'on éloigne davantage l'oculaire de l'objectif ; c'est le contraire pour les myopes.

387. — La même théorie et les mêmes formules s'appliquent à la lunette de Galilée, en observant seulement que L, pouvoir de l'oculaire, est négatif dans ce cas. Par conséquent, la valeur de G E est négative, c'est-à-dire que l'œil devrait se trouver entre l'objectif et l'oculaire ; mais les autres conditions étant incompatibles avec celles-ci, pour avoir du moins le plus grand champ possible, il faut placer l'œil immédiatement contre l'oculaire.

388. — Dans la lunette astronomique, les objets sont renversés, parce que les rayons partis des extrémités de l'objet se croisent avant de toucher l'œil ; ce qui n'arrive point dans celle de Galilée.

389. — Si l'objet s'approche davantage de l'objectif, le

grossissement augmente, parce qu'alors $\frac{l}{L-D}$ (D désignant la proximité de l'objet) exprime le pouvoir amplifiant, comme on le voit aisément par ce qui a été dit à l'art. 382. C'est ainsi qu'une lunette destinée à l'observation d'objets très proches devient un *microscope*.

Le microscope composé ordinaire ne diffère de la lunette astronomique que par les modifications exigées par l'usage que l'on en veut faire : son objectif est beaucoup plus fort que son oculaire; de manière que, pour voir des objets éloignés, il ferait l'effet d'un télescope retourné, et devrait être considérablement raccourci. Pour des objets proches, $l - D$ diminue à mesure que D augmente, et la fraction $\frac{l}{l-D}$ peut devenir aussi grande que l'on voudra en approchant l'objet de l'objectif, et en éloignant en même temps l'oculaire dont la distance à la première lentille a pour expression

$$\frac{1}{L-D}+\frac{1}{l}.$$

Mais, pour éviter de faire deux opérations, on a coutume de conserver toujours la même distance entre les deux verres, et de faire varier celle de l'objet au moyen d'une vis de rappel ou d'un engrenage. La fig. 82 représente une section d'un microscope. Il convient cependant d'avoir la faculté d'éloigner ou de rapprocher entre eux l'objectif et l'oculaire : par ce moyen, l'on peut obtenir tel grossissement que l'on voudra entre les limites correspondantes aux distances extrêmes, en choisissant une série d'objectifs tels que le plus grand pouvoir amplifiant dont le premier soit susceptible entre les limites en question surpasse le moindre grossissement que l'on peut obtenir à l'aide de la lentille qui la suivrait dans l'assortiment, et ainsi de suite. Ces objectifs sont ordinairement enchâssés dans des plaques que l'on peut amener successivement dans l'axe du microscope, au moyen d'un mécanisme fort simple.

390. — Dans le télescope catoptrique le plus simple, l'image est formée par un miroir concave, et vue à l'aide d'un oculaire convexe ou concave, comme dans le télescope dioptrique. Mais comme la tête de l'observateur intercepterait toute la lumière incidente dans un petit instrument et une partie considérable dans un grand, l'axe du réflecteur est tourné un peu obliquement, de manière à projeter les images dans le sens latéral : cette disposition prévient la perte de lumière. Son inconvénient est de contourner légèrement l'image par l'effet de l'obliquité des rayons; mais quand on construit ces télescopes sur une grande échelle, et qu'on s'en sert pour observer des corps célestes d'un éclat très faible, qui ne perdent que très peu de lumière par l'aberration de sphéricité, cet inconvénient devient insensible : tel est le télescope avec lequel sir William Herschel a exploré le ciel.

391. — Pour empêcher l'interception des rayons dont nous venons de parler, Newton, l'inventeur du télescope catoptrique, employait un petit miroir placé obliquement (fig. 83) vis-à-vis du centre du grand miroir. Alors les rayons parallèles PA, PB, émanant d'un point quelconque dans la direction de l'axe de l'instrument, tombent, avant leur rencontre, sur un miroir plan CD incliné à 45° sur l'axe; d'où ils sont réfléchis à travers un tube latéral vers la lentille G, qui les réfracte et les transmet à l'œil E. Il est clair que, si l'image formée par le miroir AB, derrière CD, peut être considérée comme un objet, une image égale sera formée en F à la même distance du miroir plan. On verra celle-ci à travers la lentille G, comme si elle était formée par un objectif de même longueur focale que le grand miroir, placé dans le prolongement de l'axe du porte-oculaire au-delà du petit miroir que l'on supprime par la pensée. Ainsi les formules et théorèmes qui se rapportent aux lunettes astronomique et de Galilée peuvent s'appliquer également au télescope newtonien quant au champ, au grossissement et à la

position de l'œil. Il suffit d'y remplacer L par 2 R et L — D par 2 R — D, en se rappelant que R est négatif, et que le miroir a sa concavité tournée du côté de la lumière incidente.

392. — Le télescope de Grégory (fig. 84), au lieu d'un petit miroir plan tourné obliquement, a un petit miroir de convergence dont la concavité regarde le grand miroir; mais, au lieu de se trouver à une distance de celui-ci égale à la somme des longueurs focales, cette distance est un peu plus grande. L'image *pq*, qui se forme au foyer du grand miroir, se trouvant à une distance du sommet du petit miroir plus grande que la longueur focale de celui-ci, il se forme une nouvelle image près de la surface du grand miroir, en *rs*, par exemple. Le centre du grand miroir est percé d'un trou qui laisse parvenir les rayons jusqu'à l'oculaire *g*; une vis sert à régler la distance entre les réflecteurs, suivant le degré de divergence des rayons ou les défauts de l'œil.

393. — Le télescope de Cassegrain ne diffère point de celui de Grégory, si ce n'est que le petit miroir est convexe, et reçoit les rayons avant leur convergence pour former une image. L'amplitude du champ de la lunette, la distance de l'œil et celle des miroirs entre eux, sont aisées à calculer pour ces deux instruments, par le simple changement de signe de la courbure du petit miroir.

Soient R' et R'' les courbures des deux réflecteurs : R' est négatif et R'' positif pour le télescope de Grégory. En nommant t la distance entre leurs surfaces (t étant négatif, parce que le second réflecteur se trouve du côté des rayons incidents), nous aurons pour un objet dont la proximité est D;

$$D' = D, \; f' = 2R' - D' = 2R' - D,$$

$$f'' = 2R'' - D'', \; D'' = \frac{f'}{1 - f't},$$

en adoptant les formules et la notation de l'art. 251.

Ces équations donnent, après substitution,

$$\left.\begin{aligned} D'' &= \frac{2R' - D}{1 - t(2R' - D)}, \\ f'' &= 2R'' - \frac{2R' - D}{1 - t(2R' - D)} = \frac{2R'' - 2R' + D - 2t(2R' - D).R''}{1 - t(2R' - D)}. \end{aligned}\right\} (f)$$

C'est la valeur inverse de la distance de la seconde image à la surface du petit miroir.

Si nous voulons que l'image vue avec l'oculaire tombe *précisément* à la surface du grand miroir, nous n'avons qu'à poser

$$f'' = \frac{1}{-t},$$

parce que f'' est positif et t négatif. Quand les rayons sont parallèles, cette hypothèse donne

$$R' R'' t^2 + (4 R' - 2 R'') t - 1 = 0 \; ; \quad . \quad . \quad (g)$$

d'où l'on peut tirer la valeur de t quand on connaît R′ et R″, et réciproquement.

394. — Nous sommes forcé de différer la description des autres instruments d'optique et des télescopes d'une construction moins simple, etc., jusqu'à ce que nous ayons traité des propriétés physiques de la lumière, et spécialement de l'inégale réfrangibilité de ses rayons et de sa coloration. C'est ce qui fera l'objet de la partie suivante.

FIN DE LA 1re PARTIE DU 1er VOLUME.

DEUXIÈME PARTIE.

CHROMATISME.

---

§ Ier. — *De la dispersion de la lumière.*

Phénomène de la séparation du rayon en couleurs. — Isolation de chaque couleur. — Une seconde réfraction ne produit pas de changement de couleur. — Les rayons de lumière diffèrent en réfrangibilité. — Indice de réfraction regardé comme variable. — Analyse et synthèse de la couleur blanche.— Synthèse de la lumière blanche par une lentille — Tous les rayons doivent se réunir pour former le blanc. — L'on peut imiter toutes les couleurs avec celles du prisme. — Les couleurs ne sont point inhérentes aux corps; — preuve expérimentale. — Précautions pour s'assurer de la parfaite homogénéité d'un rayon : — 1° le faisceau incident doit avoir très peu de largeur; — 2° il doit être très peu divergent. — Manières d'obtenir, par l'expérience, des rayons homogènes. — Comment on élude dans la pratique les imperfections des prismes. — Lignes fixes dans le spectre. — Utilité des lignes fixes dans les appréciations de l'optique. — Première méthode de faire paraître les lignes fixes. — Deuxième méthode. — Troisième méthode. — Couleurs du spectre. — Les milieux diffèrent en pouvoir dispersif; — pourquoi. — Réfraction sans qu'il se produise de couleurs. — Comparaison expérimentale des pouvoirs dispersifs. — Explication des franges colorées qui bordent les objets quand on les regarde à travers un prisme. — Assigner le pouvoir dispersif d'un milieu. — Prisme dont l'angle réfringent est variable; première espèce; deuxième espèce; troisième espèce ; — son usage. — Autre méthode pour obtenir le pouvoir dispersif, proposée par le docteur Brewster. — Comment on obtient les pouvoirs dispersifs absolus ; première manière, en mesurant le spectre sur un écran ; — seconde manière.— Méthode employée par Fraunhofer. — Usage des lignes fixes. — Comment on caractérise un rayon par la place qu'il occupe dans le spectre que produit l'eau.— Fonction algébrique de la réfrangibilité.— Hypothèse d'une dispersion constante pour tous les milieux; — fausseté de cette hypothèse.— Les dispersions ne sont pas proportionnelles.— Incommensurabilité des espaces colorés dans les spectres produits par des milieux différents. — Spectres secondaires. — Table du docteur Brewster donnant les divers milieux dans l'ordre de leur action sur la lumière verte. — Réfraction achromatique. — Puissances supérieures des pouvoirs dispersifs. —

Calcul de leurs coëfficients. — Conditions générales de l'achromatisme. — Progrès de la dispersion. — Quelle doit être la position du prisme pour que la dispersion soit un minimum. — Distorsion du spectre par des incidences extrêmes. — Combinaisons achromatiques d'un milieu quelconque. — Spectres subordonnés. — Télescope prismatique d'Amici. — Conditions d'achromatisme pour plusieurs prismes dont les angles réfringents sont très petits.— Quels sont les rayons qu'il importe le plus de réunir, 1° quand il y a deux milieux, 2° quand il y en a trois. — Cas où les formules deviennent inapplicables dans la pratique.

395. — Jusqu'à présent, nous avons regardé l'indice de réfraction comme une quantité donnée absolument, et conservant la même valeur pour tous les rayons réfractés. Dans la nature, cependant, il n'en est pas ainsi : quand un rayon de lumière tombe obliquement sur la surface d'un milieu dirimant, il ne se réfracte pas entièrement dans une seule direction ; mais il se divise en plusieurs parties, et se *disperse* en formant un angle plus ou moins grand, suivant la nature du milieu et l'obliquité de l'incidence. Ainsi le rayon solaire SC, tombant sur la surface réfractante AB, et reçu ensuite sur l'écran RV (fig. 85), y éclairera, non un seul point, tel que R, mais l'espace RV, dont la grandeur croîtra avec l'angle d'incidence. Le rayon SC, qui était simple avant la réfraction, se sépare en une infinité de rayons, CR, CO, CY, etc., qui subissent chacun une réfraction différente.

396. — Les divers rayons dont se compose la lumière réfractée diffèrent l'un de l'autre, ainsi que de la lumière incidente, par un caractère physique des plus essentiels, par la couleur. La lumière du soleil est blanche : si l'on reçoit directement un de ses rayons sur un morceau de papier, il y fera une tache blanche ; mais, si l'on présente un papier blanc (c'est-à-dire qui paraît tel à la lumière du jour) au rayon dispersé, l'on verra la partie éclairée se peindre de diverses couleurs, et les teintes se succéder dans un ordre constant, quel que soit le milieu réfringent.

397. — Pour faire l'expérience de la manière la plus con-

vaincante, l'on se procurera un prisme triangulaire de flint-glass; et, dans une chambre obscure, on laissera passer un rayon solaire par un petit trou rond OP percé dans le volet. Si l'on reçoit ce rayon sur un écran blanc D, placé à une certaine distance, il s'y formera une tache blanche de forme circulaire, c'est-à-dire une image du soleil d'autant plus grande que le papier sera plus éloigné.

Maintenant, plaçons le prisme ABC, dont une des arètes C est parallèle à l'horizon et perpendiculaire à la direction du rayon incident, de manière à recevoir la lumière obliquement sur une de ses faces BC : le rayon sera réfracté et détourné de sa route; il se relèvera dans la direction FGR, et l'on pourra le recevoir sur l'écran E convenablement placé. Alors ce n'est plus une tache ronde que l'on apercevra, mais une bande lumineuse, ou, comme on l'appelle en optique, un *spectre* RV de couleurs extrêmement vives, pourvu que le rayon solaire ne soit pas trop gros ou la distance entre le prisme et l'écran trop petite. La couleur de l'extrémité inférieure ou la moins réfractée R est un rouge brillant beaucoup plus vif et plus plein qu'on ne pourrait l'avoir par d'autres procédés, ou qu'une substance quelconque ne pourrait le donner. A celle-ci succède une teinte orangée, qui passe ensuite, par gradations imperceptibles, à un beau jaune-paille; cette dernière couleur est suivie immédiatement par un vert très pur et très intense, qui passe bientôt à un bleu verdâtre; celui-ci devient de plus en plus prononcé, en remontant toujours, jusqu'à ce qu'il atteigne la nuance de l'indigo le plus pur. Cependant, l'intensité de la clarté diminue, et la partie supérieure de la teinte indigo devient très faible : au-delà elle rougit un peu, et prend une couleur livide difficile à décrire, que l'on ne peut représenter exactement par celle d'aucun objet, mais dont la nuance la plus approchante est celle d'un violet fade : *Tinctus viola pallor.*

398. — Si l'écran qui reçoit le spectre a une ouverture

assez petite pour n'en laisser passer qu'une partie, comme X (fig. 86), la partie du rayon qui va former la tache X peut être reçue sur un autre écran *i* placé derrière le premier, et y peindra la tache *d* de même couleur que la partie X du spectre : ainsi, X se trouvant dans la partie rouge, *d* sera rouge également, et il en sera de même pour les autres couleurs. Si l'œil est en *d*, il verra à travers le trou de l'écran une image du soleil d'un éclat éblouissant, non pas blanche comme elle paraît d'ordinaire, mais de la même couleur que X. D'où il suit que l'action simultanée de tous les rayons n'est point essentielle pour produire la coloration de chaque partie du spectre en particulier, mais qu'on peut isoler une seule couleur et l'examiner séparément.

399. — Au lieu de faire tomber immédiatement sur un écran le rayon X*d*, après son passage par l'ouverture X, on peut l'intercepter par un autre prisme *acb* qui le réfracte et le détourne de sa route, comme vers X*fgx*, puis le recevoir ensuite sur un écran *e*; mais on n'observera plus alors de séparation de couleurs comme dans le spectre primitif RV, dont le dernier fait partie. On n'aperçoit qu'une seule tache de couleur uniforme, et identiquement la même que celle de X sur le premier écran : il en résulte que chaque rayon qui va former un point du spectre est non seulement indépendant de tous les autres, mais qu'une fois isolé il n'est plus susceptible de se partager en diverses couleurs par une seconde réfraction.

400. — Cette expérience simple, mais instructive, nous fait connaître les propriétés suivantes :

1° Un rayon de lumière blanche consiste en une infinité de rayons élémentaires qui diffèrent tous de couleur et de réfrangibilité.

En effet, le rayon SF (fig. 86), venant d'un point quelconque du disque solaire, qui n'aurait occupé qu'un simple point s'il était tombé immédiatement sur l'écran, ou, en sup-

posant que le trou de l'écran ait un diamètre appréciable, un espace égal à l'aire de ce trou, se dilatera considérablement en V R, dont chaque point sera plus ou moins éclairé. En outre, les rayons qui se dirigent vers V doivent nécessairement avoir été plus réfractés que ceux qui vont vers R; ce qui n'a pu avoir lieu qu'en vertu d'une propriété particulière qu'il faut attribuer aux rayons mêmes, puisque le milieu réfringent est le même pour tous.

401. — 2° La lumière blanche peut être *décomposée*, *analysée* ou séparée par la réfraction en rayons colorés élémentaires : cette séparation se nomme la *dispersion des rayons colorés*.

402. — 3° Chaque rayon élémentaire séparé ou isolé des autres par la réfraction ne peut plus être décomposé ou analysé par le même moyen : car, si l'on met un troisième et un quatrième prisme sur la route du rayon $g x$ réfracté deux fois, et qu'on le réfracte dans une direction quelconque, il ne subit plus de dispersion et garde sa couleur sans aucune altération.

403. — 4° La dispersion des rayons colorés se fait dans le plan de réfraction.

En effet, on observe que le spectre V R est toujours allongé dans ce plan : on trouve, par des mesures directes, que sa largeur est précisément la même que celle de l'image blanche D (fig. 86) du soleil, reçue sur un écran à la distance $OD = OF + FG + GR$ de l'ouverture; ce qui prouve que le rayon ne subit ni contraction ni dilatation en se réfractant dans un plan perpendiculaire au plan de réfraction.

404. — Pour expliquer tous les phénomènes dus à la dispersion par le prisme, ou les couleurs *prismatiques*, comme on les appelle, il suffit de supposer, avec Newton, que cha-

que rayon de lumière qui se réfracte a le sinus de son angle d'incidence dans un rapport constant avec celui de son angle de réfraction, aussi long-temps que le milieu et le rayon ne changent point; mais que ce rapport varie non seulement avec la nature du milieu, mais aussi avec celle du rayon. En d'autres termes, qu'il y a autant d'espèces ou du moins de variétés distinctes de lumière qu'il y a de points diversement éclairés dans le spectre produit par un rayon blanc : ce qui nous conduit à regarder la quantité μ comme susceptible de prendre tous les degrés de grandeur entre certaines limites, dont l'une (la limite inférieure) correspond au rayon le moins réfracté, c'est-à-dire au rayon rouge, et l'autre au violet, qui est le plus réfracté. Chacune de ces variétés suit séparément les lois de la réflexion et de la réfraction que nous avons déjà fait connaître. De même qu'en géométrie l'on peut comprendre toute une famille de courbes dans une même équation, en faisant varier le paramètre, ainsi l'on peut, en optique, embrasser par la même analyse toute la doctrine des réflexions, réfractions et autres accidents relatifs à la lumière blanche ou composée, en regardant comme un paramètre variable l'indice de réfraction μ.

405. — Nous ferons l'application de ce principe à l'expérience du prisme que nous venons de rapporter. Un rayon de lumière blanche incident sur la première face peut être considéré comme un faisceau composé d'un nombre infini de rayons coïncidents, doués de tous les degrés de réfrangibilité possibles entre certaines limites : l'indice de réfraction μ peut se rapporter indifféremment à l'un ou à l'autre de ces rayons. En supposant le prisme dans une situation telle qu'il reçoive le rayon perpendiculairement à une de ses faces, la déviation sera donnée par l'équation

$$\mu \, . \sin I = \sin (I + D),$$

I étant l'angle réfringent du prisme : D est donc une fonction de μ; et, si μ varie par degrés infiniment petits $\delta \mu$,

en passant d'un rayon dans le spectre au rayon qui le suit, D variera par δ D. La relation entre ces changements simultanés sera donnée par la différentiation de l'équation précédente, en employant la caractéristique δ : nous trouverons ainsi

$$\delta\mu . \sin I = \delta D . \cos(I+D), \ \delta D = \delta\mu . \frac{\sin I}{\cos(I+D)}. \quad (a)$$

Il est évident alors que D varie en même temps que μ, et que, par conséquent, deux rayons réfractés et colorés ne coïncideront jamais, mais qu'ils formeront un angle, dans le plan de réfraction, d'autant plus grand que la variation totale de μ entre les limites extrêmes sera plus considérable.

406. — Pour justifier l'expression d'*analyse* ou de *décomposition* appliquée au partage de la lumière blanche en rayons colorés, il nous reste à démontrer, par l'expérience, que celle-ci peut être reproduite par la *synthèse* de ces rayons élémentaires.

Soient deux prismes A B C, *abc*, de même matière et de mêmes angles réfringents; plaçons-les très près l'un de l'autre, en tournant leurs arêtes en sens opposés; comme dans la fig. 87. A la faveur de cette disposition, un rayon de lumière blanche, passant par la face AC du premier prisme, émergera par la face *bc* du second, sans subir de déviation ni de coloration, comme s'il n'y avait pas de prisme sur sa route : or, la dispersion ayant été opérée complétement par le prisme ABC, les rayons élémentaires ont dû se trouver séparés et colorés en traversant la petite couche d'air BC*ac*; et se disperser dans leurs directions respectives ; mais, étant réfractés par le second prisme de manière à émerger parallèlement au rayon incident, les couleurs s'évanouissent par le mélange des rayons qui se confondent.

Dans la fig. 88, soient S R et S V deux rayons blancs parallèles qui tombent sur le premier prisme et se décomposent par réfraction : le premier formera le pinceau coloré *v*R*c*, et le second un pinceau exactement semblable à *c* V *r*. Soient

Rc le rayon *le moins réfracté* du premier pinceau, et Vc le rayon *le plus réfracté* de l'autre : ils doivent nécessairement se rencontrer; et, c étant leur intersection, appliquons précisément en ce point le sommet du second prisme, dont le côté ca est parallèle à CB, mais dont l'arète est diagonalement opposée. Alors les rayons Rc et Vc seront réfractés isolément, de manière à émerger, selon des parallèles à leurs directions primitives SR, SV, et ils iront coïncider et se couvrir comme en cs : ainsi le rayon émergent cs contiendra un rayon rouge extrême et un rayon violet extrême; il contiendra de plus toutes les variétés intermédiaires. Pour le prouver, menons cf par un point quelconque entre cR et cV : alors, puisque l'angle entre cf et la surface BC est plus grand que l'angle formé par le rayon violet extrême, mais moindre que celui que fait le rouge extrême, il doit y avoir certaines valeurs de μ entre ces deux limites qui donnent une déviation égale à l'angle entre cf et SY parallèle à SR : par conséquent, si SY est un rayon blanc qui forme le pinceau v'Yr', le rayon coloré Yfc, doué de cette réfrangibilité moyenne, tombera en c et se réfractera suivant cs. Chaque point de la surface gfh enverra vers c un rayon de différente réfrangibilité, depuis la plus grande valeur de μ jusqu'à la plus petite. Ainsi tous les éléments colorés qui, avant leur incidence, appartenaient tous à des rayons différents, iront, après la seconde réfraction, coïncider en cs; et l'expérience montre qu'ainsi réunis ils forment un rayon blanc.

On recompose donc la lumière blanche quand tous les éléments colorés, quoique appartenant dans l'origine à des rayons blancs séparés, sont réunis dans les places et directions qui leur sont propres.

407. — Dans la réflexion considérée comme cas particulier de la réfraction, μ a une valeur numérique invariable qui caractérise ce phénomène : ainsi il ne peut y avoir de

dispersion dans ce cas, puisque tous les rayons colorés suivent la même route après la réflexion.

Il n'y a qu'une seule exception, plutôt spécieuse que réelle : c'est quand la lumière est réfléchie intérieurement par la base du prisme, comme nous le ferons voir plus loin.

408. — L'on peut démontrer d'une autre manière la recomposition de la lumière blanche avec des rayons colorés, en faisant passer un rayon solaire à travers un prisme A B C (fig. 89), et en le recevant, après sa dispersion, sur une lentille E D placée à une distance convenable.

Si l'on tient un écran derrière la lentille et qu'on l'éloigne suffisamment, le spectre entier ne formera plus qu'une tache de lumière blanche. La marche des rayons se conçoit aisément en considérant la figure 89, dans laquelle T E et T D représentent les pinceaux de deux couleurs différentes (rouges et violets, par exemple), dus à la décomposition du rayon solaire S T. Ceux-ci seront rassemblés après la réfraction, chacun dans le foyer qui lui est propre, le premier en F, le second en G : après quoi chaque pinceau divergera de nouveau, l'un formant le cône F H et l'autre le cône G H. En tenant alors l'écran en H, chacun de ces pinceaux y marquera un cercle de même couleur que lui, et il en sera ainsi de tous les pinceaux intermédiaires ; mais ces cercles venant à coïncider, le cercle H contiendra tous les rayons du spectre, qui s'y confondront et produiront une blancheur parfaite, excepté vers les bords, où l'on apercevra une légère frange colorée, qui provient de ce que les images empiètent un peu les unes sur les autres.

409. — L'on démontre que le concours de tous les rayons est nécessaire pour former le blanc, en interceptant une partie du spectre avant qu'il ne tombe sur la lentille : ainsi, si l'on intercepte le violet, le blanc prendra une teinte jaune ; si l'on supprime ensuite successivement le bleu, puis le vert,

ce jaune deviendra de plus en plus rouge, et passera par l'orangé au rouge écarlate et au rouge ponceau. En commençant par l'extrémité rouge du spectre, l'on fera passer le blanc au vert pâle, puis au vert éclatant, au bleu verdâtre, au bleu, et enfin au violet, en interceptant successivement les rayons élémentaires les moins réfrangibles. Si l'on intercepte le milieu du spectre, la concentration du reste des rayons produira diverses nuances de pourpre, de cramoisi, etc., suivant la partie que l'on aura supprimée.

L'on peut, en interceptant certains rayons, obtenir telle couleur que l'on voudra, et *il n'y a point de nuance dans la nature que l'on ne puisse imiter ainsi parfaitement, avec un éclat et une richesse que les couleurs artificielles ne peuvent jamais atteindre.*

Maintenant, si nous observons que toutes ces nuances se peignent sur un papier blanc qui réfléchit vers notre œil tous les rayons qu'il reçoit, et que ce même papier, placé successivement dans la partie rouge, verte ou bleue du spectre, prend indifféremment la couleur de cette partie, nous en conclurons que :

410. — *Les couleurs des corps ne leur sont point inhérentes : elles ne résultent que de la disposition particulière des molécules qui les rend propres à réfléchir en plus grande abondance les rayons d'une certaine couleur, et à transmettre, éteindre ou (comme on le dit en optique) absorber les autres.*

411. — Telle est la doctrine de Newton sur l'origine des couleurs : tous les phénomènes d'optique s'accordent pour la confirmer. Mais la preuve la plus directe et peut-être la plus satisfaisante résulte de ce simple fait, que tous les corps, quelle que soit leur couleur quand on les voit à la lumière blanche, paraissent de celle des rayons du spectre auxquels on les expose; seulement la teinte est d'autant plus vive que

ceux-ci ont plus d'analogie avec la couleur qui est propre à ces corps.

Par exemple, le vermillon placé dans le rouge paraît du rouge le plus éclatant. Dans l'orangé et le jaune, il paraît orangé et jaune; mais son éclat est moindre. Les rayons verts lui donnent aussi leur couleur; mais, à cause de la grande inaptitude du rouge à réfléchir la lumière verte, il paraît sombre et terne : il le devient encore davantage dans le bleu; et, dans l'indigo et le violet, il est presque entièrement noir.

D'un autre côté, un morceau de papier bleu foncé ou bleu de Prusse prend un éclat extraordinaire quand on l'expose aux rayons indigos. Dans le vert il devient vert, mais avec moins d'éclat; dans le rouge il paraît presque noir.

Tels sont les phénomènes que l'on obtient avec des couleurs pures et intenses; mais les corps de couleur mêlée, comme du papier jaune ou rose, ou dont les teintes sont moins prononcées, comme le bleu ou le vert pâle, le brun, etc., étant plongés dans les rayons du spectre, les réfléchissent en abondance en prenant leur couleur.

412. — La réfraction par le prisme nous fournit les moyens de partager un rayon de lumière blanche en rayons d'inégale réfrangibilité, c'est-à-dire de le décomposer. Mais, pour que cette analyse soit complète, et que chaque rayon soit dans un état de pureté parfaite, il faut prendre plusieurs précautions, dont voici les plus importantes :

1° Le rayon de lumière blanche doit être très délié, et approcher autant que possible du rayon mathématique.

En effet, soient AB, *ab*, un faisceau de rayons parallèles, d'une largeur sensible (fig. 89, 2°), qui tombe sur le prisme P : les rayons extrêmes AB, *ab*, se diviseront pour aller former les spectres GBH et *gbh*; BG, *bg*, étant les rayons violets, et BH, *bh*, les rayons rouges de chacun d'eux. Puisque AB et *ab* sont parallèles, CG et *cg* le seront également, ainsi que DH et *dh* : le rayon rouge DH venant de B coupera

donc le rayon violet cg, parti de b, en un certain point F derrière le prisme, et sur un écran E F f placé en F. Ce point paraîtra blanc, puisqu'il est éclairé par un rayon rouge et par un rayon violet, et par conséquent (comme il est aisé de le voir) par tous les rayons intermédiaires partis des points entre B et b. Si l'écran est plus près du prisme que le point F, comme en K L k l, il est évident que les droites menées parallèlement à K C et à D L, d'un point quelconque entre L et K, dans une direction intermédiaire, tomberont respectivement entre C et c, D et d, etc. Chaque point entre L et k recevra donc de chaque point de la surface $c\,d$ du prisme un rayon de différente couleur, et deviendra blanc. Or tout point tel que x entre k et l ne peut recevoir aucun rayon violet, c'est-à-dire dont l'angle de déviation surpasse $180° - a\,b\,x$: en effet, pour qu'un tel rayon atteigne x, il doit venir d'une partie du prisme au-dessous de b, ce qui est contraire à l'hypothèse d'un faisceau de largeur déterminée A B, $a\,b$; mais les rayons dont l'angle de déviation sera moindre que $180° - a\,b\,x$ viendront concourir en x, en partant de l'une ou de l'autre partie de la surface D d.

Par conséquent, la couleur de la partie $k\,l$ de l'image sur l'écran sera blanche en k, d'un rouge pur en L, et entre le rouge et le blanc, c'est-à-dire un mélange des rayons les moins réfrangibles du spectre, pour tous les points intermédiaires. De même la partie K L sera blanche en L, violette en K, et d'une couleur intermédiaire due au mélange des rayons les plus réfrangibles pour tous les points entre L et K.

Si l'on recule l'écran au-delà de F, comme en G g H h, la portion blanche disparaîtra, puisqu'il n'y a aucun point entre g et H qui puisse recevoir un rayon dont l'angle de déviation soit compris entre $180° - a\,b\,g$ et $180° - a\,b$ H. Nous pouvons regarder toute l'image G h comme formée par une infinité de spectres dus à chaque rayon du faisceau A B $a\,b$, et tels que chacun empiète sur celui qui le précède. Moins il y aura de ces spectres qui se dépasseront, c'est-à-dire moins le faisceau incident aura de largeur, plus

les couleurs seront pures. En augmentant la distance entre l'écran et le prisme, on obtiendra visiblement le même effet qu'en diminuant l'épaisseur du faisceau : car chaque couleur occupant constamment le même espace sur l'écran (à cause de $Gg = Kk$), le spectre total s'étendra sur un plus grand espace, à mesure que l'écran sera plus éloigné, par l'effet de la divergence des rayons élémentaires ; et par conséquent chaque couleur en particulier doit être alors mieux séparée des autres.

413. — 2°. Une autre cause de confusion et d'homogénéité imparfaite dans les couleurs du spectre est le diamètre angulaire du soleil ou de tout autre luminaire, même quand l'ouverture qui laisse passer la lumière est aussi petite que possible.

Soit S T (fig. 90) le soleil, dont les rayons arrivent au prisme A B C à travers le petit trou O percé dans un écran placé vis-à-vis : le rayon se dilatera par la réfraction, et formera le spectre *vr*.

Maintenant, si nous ne considérons que les rayons d'une certaine espèce, comme le rouge, en faisant abstraction des autres, il est évident qu'il se formera sur l'écran une image rouge du soleil, les rayons de chaque point du disque se croisant en O, et poursuivant différentes routes après leur réfraction. Si le prisme se trouve dans son lieu de déviation *minimum*, ce que nous supposerons ici, cette image sera un cercle qui sous-tendra en O le même angle que le soleil.

De même, les rayons violets (considérés en particulier) produiront en *v* une image violette du soleil, en raison de leur grande réfrangibilité, et chaque espèce de rayons de réfrangibilité intermédiaire viendra former une image circulaire entre *r* et *v*. Les spectres ainsi engendrés (fig. 91, *a*) produiront des images colorées de toute espèce de réfrangibilité qui se dépasseront mutuellement.

Or, si l'on diminue le diamètre angulaire du soleil ou

du luminaire, chacune de ces images diminuera proportionnellement de grandeur; mais leur nombre et l'étendue totale qu'elles occupent en hauteur resteront les mêmes; elles se couvriront donc de moins en moins (fig. 91, *b*, *c*); et, si l'on conçoit le luminaire réduit à un simple point (tel qu'une étoile), le spectre deviendra la ligne *d*, composée d'une infinité de points mathématiques, tous d'une clarté parfaitement homogène.

414. — Il y a une foule de moyens de diminuer le diamètre angulaire ou la divergence du faisceau incident : d'abord on peut le faire passer à travers une petite ouverture A dans un écran, et recevoir le cône de rayons divergents sur un autre écran B (fig. 7), à une distance considérable du premier, et percé d'un petit trou B, pour ne laisser passer qu'une partie de l'image du soleil. La divergence du rayon B C, transmis de cette manière, sera visiblement moindre que s'il venait directement de A : elle diminuera avec le rapport du diamètre de l'ouverture B au diamètre de l'image du soleil sur l'écran.

415. — Il est beaucoup plus avantageux de substituer au soleil son image prise au foyer d'une lentille convexe de court foyer : cette image est très petite, son diamètre étant égal à la longueur focale de la lentille $\times$ le sinus du diamètre angulaire du soleil (ou le sinus de 30′, qui vaut à peu près la cent-quatorzième partie du rayon); de manière qu'une lentille d'un pouce de foyer concentre les rayons dans un cercle d'environ un cent-quatorzième de pouce de diamètre. Un tel cercle peut être regardé comme un point physique, pour l'usage que l'on veut en faire. La disposition de l'appareil est représentée par la fig. 92.

Les rayons rassemblés en F par la lentille L divergent ensuite comme s'ils émanaient d'un point très brillant placé en F : à une certaine distance de ce point, et très près du prisme A B C, l'on placera un écran percé d'une petite ouver-

ture O, et l'on recevra le spectre rv sur un autre écran, à une distance considérable derrière le prisme. Les couleurs de ce spectre seront d'une pureté et d'une homogénéité très grandes, que l'on pourra porter aussi loin que l'on voudra, en diminuant le diamètre de l'ouverture O et la longueur focale de la lentille, et en augmentant la distance F O ou O r. Il faut remarquer cependant que l'intensité du rayon incident et la quantité de la lumière homogène sont d'autant moindres que ce rayon est plus pur.

416. — Une troisième manière d'obtenir un faisceau homogène est de répéter l'analyse d'un rayon qui a déjà toute la pureté que peut donner un simple prisme : ainsi, dans la fig. 93, le spectre V R formé par le prisme A se peint sur un écran qui l'intercepte entièrement, à l'exception de la couleur que l'on désire isoler et purifier, et que l'on fait passer à travers l'ouverture M N ; derrière cet écran se trouve un autre prisme B qui réfracte une seconde fois le rayon coloré. Si la partie M N était déjà d'une pureté parfaite, la réfraction se ferait à travers le second prisme, sans aucune dispersion ; mais, si elle contient des rayons étrangers (comme il arrive toujours), ceux-ci se dilateront, et produiront un nouveau spectre vr d'un éclat très faible, au milieu duquel se trouvera la partie mn beaucoup plus vivement éclairée que le reste. En ne laissant passer que les rayons de cette partie à travers une ouverture dans un écran, le rayon émergent mp sera plus homogène qu'avant son incidence sur le second prisme, et l'on pourra le purifier encore davantage en augmentant la distance entre le second prisme et le premier écran.

417. — Enfin, une autre cause du mélange des couleurs prismatiques vient des défauts que l'on rencontre dans la matière des prismes ordinaires, dont les stries et les veines dispersent la lumière irrégulièrement, et mêlent ainsi, dans le spectre, des couleurs qui appartiennent à des parties diffé-

rentes. Ceux qui n'ont point le bonheur de posséder des prismes exempts de ces imperfections (car il est très difficile de se procurer de tels instruments, à quelque prix que ce soit) pourront faire usage de prismes creux que l'on remplit d'eau, ou plutôt de quelque huile très dispersive. On peut cependant éviter la plupart des inconvénients d'un mauvais prisme en faisant tomber les rayons aussi près de l'arète qu'il est possible, afin de diminuer la quantité de la matière que les rayons doivent traverser, et par conséquent les chances de rencontrer une veine ou une strie sur leur passage.

418. — Quand on a pris soin d'avoir un spectre bien pur, quand la divergence et la largeur du faisceau incident sont aussi petites que possible, quand le prisme est parfait et le spectre assez allongé pour subir un examen rigoureux dans toutes ses parties, l'on y observe plusieurs particularités qui ont été publiées pour la première fois par le docteur Wollaston, dans les *Transactions philosophiques de* 1802. Elles ont été examinées de nouveau dans le plus grand détail, avec tout le soin que pouvait y apporter un talent supérieur aidé des instruments les plus parfaits, par le célèbre *Fraunhofer,* dont on doit déplorer à jamais la perte. Il paraît que ce dernier n'avait aucune connaissance du mémoire de Wollaston ; de manière qu'il a tout le mérite de sa découverte, qui consiste en ceci :

Si l'on reçoit sur un écran blanc le spectre solaire dans son état de pureté et de ténuité la plus grande, ou qu'on le laisse arriver directement à l'œil, il n'a point l'apparence d'une ligne continue, rouge à l'un de ses bouts et violette à l'autre ; les rayons n'y passent pas non plus par degrés insensibles d'une couleur à une autre, ainsi que le croyait Newton, et qu'on le jugerait au premier coup-d'œil. Il est rayé d'intervalles absolument noirs ; et, dans les parties lumineuses, l'intensité de l'éclairement y varie avec tant d'irrégularité qu'elle semble n'être assujettie à aucune loi, ou du moins, si elle en suit une, cette loi doit être extrêmement compli-

quée. Par conséquent, si nous considérons un spectre formé par une ligne lumineuse très étroite et parallèle à l'arête du prisme, ce spectre sera très large, sans que la pureté de ses couleurs en soit altérée, puisqu'il n'est en effet qu'un assemblage de spectres linéaires juxtaposés; mais, au lieu d'une bande de lumière d'égale intensité et de couleurs graduées, on ne verra plus qu'un ruban rayé, dans le sens de sa largeur, d'une infinité de lignes obscures et quelquefois totalement noires, distribuées très inégalement sur tout le spectre : cette irrégularité ne provient pas cependant de circonstances accidentelles, car les lignes se trouvent toujours aux mêmes endroits, et gardent entre elles le même ordre et les mêmes rapports, la même largeur proportionnelle et le même degré d'obscurité, *pourvu que l'on emploie la lumière du soleil* et que la matière des prismes soit toujours la même. Si cette dernière condition n'est point remplie, le nombre, l'ordre, l'intensité des bandes obscures, et leur situation par rapport à chaque couleur en particulier, n'éprouvent pas de variation, mais seulement leurs distances respectives, comme nous le ferons voir plus loin.

On doit entendre par lumière du soleil non pas uniquement celle des rayons qui nous arrivent en ligne droite de cet astre, mais toute lumière dont il est la source, comme celle des nuages, du firmament, de l'arc-en-ciel, de la lune ou des planètes : toutes ces lumières, quand on les analyse au prisme, offrent les mêmes phénomènes.

On observe des lignes analogues dans les spectres provenant de la lumière des étoiles, de l'électricité, de la flamme; mais leur disposition est différente pour chaque espèce de lumière : chaque étoile, chaque flamme a un système de bandes particulier qui la caractérise, et demeure invariable en tous temps et en toutes circonstances.

419. — La fig. 94 représente le spectre solaire tel que l'a trouvé Fraunhofer, à l'aide des mesures micrométriques les plus exactes et d'un prisme de son incomparable flint-glass.

Seulement, pour éviter la confusion, nous avons supprimé la plupart des lignes noires (il y en a plus de cinq cents), en n'en conservant que sept principales, marquées par B, C, D, E, F, qu'il a nommées *raies fixes* dans le spectre, et qui servent de termes de comparaison, parce qu'on les distingue facilement : B se trouve à l'extrémité rouge; C plus haut dans la même couleur; D dans l'orangé : c'est une grosse ligne double que l'on reconnaît aisément; E se trouve dans le vert, F dans le bleu, G dans l'indigo et H dans le violet. Il y a encore d'autres lignes fort remarquables, telles que *b* dans le vert, entre E et F, qui se compose de trois fortes lignes, dont les deux premières sont plus rapprochées que la troisième, etc.

420. — La netteté de ces lignes et leur position invariable par rapport aux couleurs du spectre, ou, si l'on veut, la précision des limites de la réfrangibilité des rayons *déficients*, rend cette découverte d'une importance inestimable, en nous permettant de donner aux mesures que l'on emploie en optique une exactitude inconnue jusqu'à nos jours, et presque égale à celle des observations astronomiques. Fraunhofer, dans ses divers essais, en a tiré le parti le plus avantageux, comme nous aurons bientôt occasion de le remarquer.

421. — Pour observer les phénomènes que nous venons de décrire, il faut placer l'angle réfringent d'un prisme parfait de manière à ce que l'arête soit parallèle à une fente très étroite qui laisse passer la lumière solaire. Au lieu de cette fente, on peut employer aussi une lentille cylindrique ou semi-cylindrique d'un rayon très petit qui réunit les rayons en un foyer linéaire, d'où les rayons divergent comme d'une droite lumineuse très fine, de la manière décrite à l'art. 415 pour une lentille. Maintenant, si l'on applique l'œil immédiatement derrière le prisme, cette ligne, en se dilatant, prendra la forme d'une large bande colorée, où toutes les couleurs se peindront dans l'ordre qui leur est propre. Si le

prisme est bon, et placé de manière à donner la déviation minimum, et si l'angle réfringent est assez ouvert pour que le spectre soit d'une largeur suffisante, quelques unes des lignes fixes les plus remarquables seront parallèles aux extrémités du spectre, surtout les lignes D et F, dont la première paraîtra séparer le rouge du jaune. Si la lumière qui vient directement du soleil est trop éblouissante, l'on peut lui substituer la lumière du jour, que l'on fait passer par une fente étroite, comme celle qui reste entre deux volets. C'est de cette manière que Wollaston a découvert les lignes fixes.

422. — Mais il est difficile d'apercevoir de cette manière les lignes fixes même les plus remarquables, à cause de leur peu de largeur angulaire, qui, dans les circonstances les plus favorables, excède à peine une demi-minute, et dans les autres un petit nombre de secondes. On est donc obligé de les grossir à l'aide d'un télescope placé entre l'œil et le prisme, comme le représente la fig. 95, où L *l* est la fente que traversent les rayons solaires avant de tomber sur le prisme A B C, et D l'objectif qui reçoit les rayons réfractés. Cet objectif doit être *achromatique*, c'est-à dire qu'il doit être construit de manière à réunir les rayons de différentes couleurs en des foyers à égale distance de la lentille. Nous verrons bientôt comment l'on parvient à ce but.

Ne considérons maintenant que les rayons doués d'un certain degré de réfrangibilité (les rouges, par exemple). Les pinceaux divergeant de chaque point de L *l* iront, après leur réfraction par les deux faces du prisme, diverger à partir des points correspondants d'une image L′ *l*′ dans la direction de la base vers l'arète C; les rayons plus réfrangibles divergeront à partir de l'image L″ *l*″ parallèle à L′ *l*′, mais plus éloignée de L *l* : ainsi, après la réfraction, la ligne blanche L *l* aura pour image le rectangle coloré L L″ *l*′ *l*″, que l'on verra à travers le télescope comme si c'était un objet réel. Chaque

ligne verticale dans ce parallélogramme formera donc au foyer de l'objectif une image de même couleur qu'elle; et ce verre étant achromatique, toutes ces images seront à égale distance; de manière que le rectangle L' l'' aura pour image une figure de même couleur, perpendiculaire à l'axe du télescope : cette figure sera vue comme un objet réel à travers l'oculaire, et le spectre sera amplifié de cette manière, comme le serait tout autre objet, en raison du pouvoir de l'intrument (art. 382).

Au moyen d'un appareil ainsi disposé (et c'est celui dont s'est servi Fraunhofer), les lignes fixes ressortent très bien, et peuvent être rendues aussi larges que l'on voudra, pourvu que le prisme soit parfait : on conçoit, en effet, que le moindre défaut d'homogénéité doit rendre l'observation impossible. Il serait tout-à-fait inutile d'essayer cette expérience avec des prismes ordinaires; et, pour la répéter, on est obligé d'avoir recours à des liquides très réfringents contenus dans une boîte de verre prismatique. Les oculaires des télescopes n'étant pas toujours achromatiques, il faut légèrement changer le foyer pour voir les lignes dans le rouge et dans le violet. L'usage d'un oculaire achromatique prévient cet inconvénient.

423. — En démontant le télescope et en recevant les rayons réfractés par l'objectif sur un écran placé à son foyer, l'on démontre aisément qu'il se forme en ce foyer une véritable image du spectre et des lignes fixes. On peut ainsi faire voir ces phénomènes à plusieurs personnes à la fois d'une manière très satisfaisante. On place un objectif achromatique d'une longueur focale considérable (six pieds, par exemple) à une distance à peu près double de cette longueur de l'ouverture qui laisse passer la lumière : comme le prisme se trouve immédiatement devant le verre, l'image se formera à environ douze pieds derrière l'objectif (à cause de $f = L + D$, $L = \frac{1}{6}$, $D = -\frac{1}{12}$, $f = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = +\frac{1}{12}$); et, étant reçue alors

sur un papier blanc ou un verre usé à l'émeri, l'on pourra l'examiner à loisir, et mesurer à l'échelle les distances des lignes entre elles, etc.

Mais la meilleure méthode d'obtenir ces mesures est celle qu'a employée Fraunhofer, c'est-à-dire en adaptant un micromètre à l'extrémité du télescope la plus voisine de l'œil (voyez dans la table le mot *Micromètre*), pour s'assurer des distances des lignes les plus rapprochées : on fait tourner alors l'axe de l'instrument avec le prisme, qui fait corps avec lui, dans un plan horizontal où des verniers et des loupes donnent à la lecture des angles sur un cercle gradué toute l'exactitude des observations astronomiques. L'appareil de Fraunhofer, qui peut servir également à une foule de recherches d'optique, est représenté par la fig. 96.

424. — Les lignes fixes dans le spectre ne marquent aucune limite précise entre les diverses couleurs. Selon le docteur Wollaston (*Trans. Phil.*, 1802), le spectre se compose de quatre couleurs : le rouge, le vert, le bleu et le violet. Ce savant considère comme un mélange de rouge et de vert la petite ligne de jaune qu'il aperçoit, en observant d'après sa méthode qui consiste à regarder à la vue simple une ligne de lumière à travers un prisme; il regarde ces couleurs comme bien terminées, sans gradations sensibles entre elles et d'une teinte à peu près uniforme dans toute leur étendue. Nous avouerons qu'il ne nous a jamais été possible de vérifier cette dernière observation. Dans les expériences de Fraunhofer, dont nous avons eu l'avantage d'être témoin, puisqu'il le répéta lui-même devant nous à Munich, les lignes les plus fines du spectre étaient parfaitement distinctes et les rayons sans aucun mélange. Cependant les teintes variaient par degrés tout-à-fait insensibles, en passant d'une couleur à celle qui la suit; et l'on remarque la même chose dans la figure colorée du spectre publiée dans le premier mémoire de cet excellent artiste, et exécutée par lui avec un soin et une fidélité incroyables. La présence d'une bande jaune-paille

d'une largeur très sensible s'y remarque facilement; et l'on peut encore s'en assurer par d'autres expériences que nous décrirons plus tard en parlant de l'absorption de la lumière.

En un mot, à l'exception des lignes fixes, que Newton ne pouvait connaître à cause de l'imperfection de ses instruments, le spectre est absolument tel que l'a décrit d'abord cet illustre philosophe : les teintes s'y dégradent, et l'on peut reconnaître distinctement les sept couleurs qu'il a énumérées; mais leurs limites se touchent de si près qu'on ne saurait les fixer au juste. Si ces couleurs sont réellement composées ou non, si un nouveau genre d'analyse ne parviendrait pas à les séparer en vertu d'une autre différence caractéristique entre les rayons que le degré de réfrangibilité, ce sont là des questions d'une autre nature, que nous traiterons plus loin. Qu'il nous suffise de remarquer, pour le moment, que, suivant toutes les probabilités données journellement par l'expérience, il est à croire que l'orangé, le vert et le violet sont des couleurs mêlées, et que les couleurs primitives sont le rouge, le jaune et le bleu : les premières peuvent être imitées par le mélange des secondes; mais le contraire ne se voit jamais. Ce système a été soutenu par Mayer, dans un traité curieux qui se trouve parmi ses œuvres. (Voy. à la fin de cet ouvrage la liste des auteurs qui ont écrit sur l'optique.) Néanmoins, le docteur Young a avancé une opinion toute contraire dans ses *Leçons de physique*, I, p. 441 : il y affirme que les couleurs fondamentales sont le rouge, le vert et le violet. Nous discuterons bientôt ces deux systèmes. (Voy., dans la table, *Composition des couleurs*.)

425. — Les milieux, comme nous l'avons vu, diffèrent beaucoup en pouvoir réfringent, c'est-à-dire que des prismes dont l'angle réfringent est le même détournent plus ou moins le rayon lumineux, suivant la matière dont ils sont formés.

Cette propriété était connue des physiciens qui ont précédé Newton. En faisant connaître ce fait général que le

même milieu réfracte différemment les rayons de couleur différente, ce grand homme aura été conduit naturellement à chercher par l'expérience si chaque couleur avait la même réfrangibilité relative pour tous les milieux. Il paraît avoir été induit en erreur par une expérience trompeuse où il employa plusieurs milieux (1), et il en tira la fausse conclusion que des milieux exercent une *action proportionnelle* sur les rayons de même couleur. M. Hall, gentilhomme du comté de Worcester, s'aperçut le premier de l'erreur de Newton; et, s'étant assuré que le pouvoir dispersif varie pour chaque espèce de verre, il appliqua cette propriété, avec le plus grand succès, à la construction d'une lunette achromatique. Cependant sa découverte tomba dans un injuste oubli, quoiqu'on dise qu'il acheva plusieurs lunettes de cette espèce, dont quelques unes existent encore : elle fut retrouvée, et appliquée de nouveau par Dollond, célèbre opticien de Londres, à l'occasion d'une dispute qui s'éleva à ce sujet par suite de quelques idées paradoxales avancées par Euler.

426. — Si l'on présente à deux rayons de lumière blanche deux prismes tels que A B C et *abc* (fig. 97), l'un de flint-glass et l'autre de crown-glass, dont les angles réfringents sont égaux, S C et *sc* étant les rayons incidents, C R, C V, *cr*, *cv*, les rayons rouges et violets réfractés par le flint et le crown-glass, l'on observe 1° que la déviation produite sur le rouge et le violet par le flint-glass est beaucoup plus forte que par le crown-glass; 2° que l'angle R C V, que les rayons colorés couvrent après leur dispersion par le flint-glass, surpasse de beaucoup l'angle analogue *rcv* pour le

(1) Il essaya de corriger les effets de la réfraction par le verre, à l'aide d'un prisme rempli d'eau. Il ne devait rester qu'une légère coloration : malheureusement il avait mêlé de la litharge avec l'eau, pour rendre la réfraction plus forte; et le grand pouvoir dispersif des sels du plomb (pouvoir qu'il lui était impossible de soupçonner) lui enleva la gloire d'une des plus belles découvertes en optique.

crown-glass ; 3° que ces mêmes angles R C V et *rcv* ou les *angles de dispersion* ne sont point entre eux dans le même rapport que les *angles de déviation* TCR, *tcr*, ainsi que le supposait Newton, mais dans un rapport beaucoup plus considérable, le flint-glass étant proportionnellement beaucoup plus dispersif. Au lieu de donner aux deux prismes des angles égaux, si l'on prend l'angle de celui de crown-glass assez grand pour que la déviation du rayon rouge soit égale à celle que produit le flint-glass, le violet sera bien loin d'être également dévié : par conséquent (fig. 98), si les prismes sont placés de manière à ce que leurs faces homologues soient opposées, pour qu'ils agissent en sens contraire, le rayon rouge, étant également réfracté par tous les deux, ne subira aucune déviation; tandis que le rayon violet, plus réfracté par le flint que par le crown-glass, se rapprochera de la partie la plus épaisse du prisme de flint-glass, et il restera ainsi une couleur violette, tandis que les effets de la réfraction seront détruits, du moins pour une espèce de rayons.

Réciproquement, si l'on corrige la dispersion, c'est-à-dire si l'angle réfringent du prisme de crown-glass, agissant en sens contraire de celui de flint-glass, est assez grand pour que la différence de déviation entre les rayons rouges et violets du crown-glass égale cette même différence par rapport au flint-glass, la déviation due au crown-glass en particulier sera plus forte que celle de l'autre verre, et la déviation totale produite par l'action simultanée des deux prismes tiendra davantage de celle du crown-glass.

427. — Par une semblable combinaison de deux prismes de matière différente, l'on peut détourner considérablement un rayon blanc de sa route, sans le séparer en ses éléments colorés. En supposant les angles des prismes assez petits, et ceux-ci dans leur position de déviation minimum, il est manifeste que ces déviations doivent être en raison inverse des pouvoirs dispersifs des deux milieux, pour obtenir l'effet désiré. En effet, μ, μ', désignant les indices de réfraction

des prismes pour les rayons rouges extrêmes, et $\mu + \delta\mu$, $\mu' + \delta\mu'$, pour les rayons violets extrêmes; A et A′ les angles réfringents, et D et D′ les déviations; l'on a généralement, dans la position des prismes dont on vient de parler,

$$\mu \cdot \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A+D}{2};$$

d'où

$$\delta\mu \cdot \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\,\delta D \cos \frac{A+D}{2},$$

$$\mu' \sin \frac{A'}{2} = \sin \frac{A'+D'}{2},\ \delta\mu' . \sin \frac{A'}{2} = \frac{1}{2}\,\delta D' \cos \frac{A'+D'}{2};$$

d'où l'on tire, puisque les prismes sont opposés,

$$\frac{1}{2}\,\delta(D - D') = \frac{\delta\mu \sin \frac{A}{2}}{\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)} - \frac{\delta\mu' \sin \frac{A'}{2}}{\cos\left(\frac{A'+D'}{2}\right)}.$$

Posant cette quantité égale à zéro, il vient

$$\frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} A'} = \frac{\cos \frac{1}{2}\,(A+D)}{\cos \frac{1}{2}\,(A'+D')}.$$

En éliminant $\sin \frac{1}{2} A$ et $\sin \frac{1}{2} A'$ au moyen des équations primitives dont nous sommes partis, nous trouvons

$$\frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \times \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A+D)}{\cos \frac{1}{2}(A'+D')} \times \frac{\sin \frac{1}{2}(A'+D')}{\sin \frac{1}{2}(A+D)}$$
$$= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A'+D')}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+D)}.$$

Nommant p et p' les pouvoirs dispersifs des milieux, ou la partie proportionnelle de la réfraction totale du rayon rouge, à laquelle la dispersion est égale par chaque milieu, nous aurons

$$p = \frac{\delta\mu}{\mu - 1},\ p' = \frac{\delta\mu'}{\mu' - 1},\ \frac{p}{p'} = \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \times \frac{\mu' - 1}{\mu - 1};$$

de manière que

$$\left.\begin{aligned}\frac{p}{p'}&=\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{\mu'-1}{\mu-1}\cdot\frac{\tang\frac{1}{2}(A'+D')}{\tang\frac{1}{2}(A+D)}\\&=\frac{\mu'-1}{\mu-1}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}A'}{\sin\frac{1}{2}A}\cdot\sqrt{\frac{1-\mu^2(\sin\frac{1}{2}A)^2}{1-\mu'^2(\sin\frac{1}{2}A')^2}}.\end{aligned}\right\}(a)$$

Telle est la formule rigoureuse. Quand A et A' sont très petits, elle devient simplement

$$\frac{p}{p'}=\frac{(\mu'-1)A'}{(\mu-1)A},$$

ou, puisque $(\mu-1)A=D$ et $(\mu'-1)A'=D'$,

$$\frac{p}{p'}=\frac{D'}{D}.$$

428. — La formule (a) nous fournit une méthode expérimentale de déterminer le rapport des pouvoirs dispersifs de deux milieux. Si l'on parvient à donner à chacun d'eux la forme d'un prisme dont l'angle réfringent soit tel que les contours d'un objet brillant et bien terminé, vu à travers les deux prismes (que l'on suppose dans leur lieu de moindre déviation), paraissent nettement tranchés et exempts de couleurs, l'on obtiendra sur-le-champ le rapport en question, au moyen de la formule (a), après avoir mesuré les angles réfringents et remplacé les indices de réfraction par leurs valeurs conclues d'autres expériences.

429. — Quand nous regardons à travers un prisme un objet bien terminé plus clair que le fond sur lequel il se projette, ou plus obscur, comme un barreau de fenêtre qui se projette sur le ciel, ses bords paraissent mal terminés, et entourés d'une frange de diverses couleurs. En voici la raison :

Soit A B (fig. 99) une section d'un barreau horizontal vu à travers le prisme P dont l'angle réfringent est en bas, et considérons d'abord l'extrémité supérieure B de l'objet : comme c'est la lumière, et non l'obscurité, qui rend les objets

visibles, nous ne voyons réellement pas l'objet obscur, mais le fond lumineux sur lequel il se dessine, ou les espaces B C, A D, au-dessus et au-dessous. L'espace lumineux B C, étant éclairé par la lumière blanche, produira, après la réfraction par le prisme, une série d'images colorées, *bc*, *b' c'*, *b" c"*, etc., qui se couvriront, mais en se dépassant. La figure les représente à différentes distances de P, mais uniquement pour les rendre distinctes. En réalité, elles doivent se superposer dans presque toute leur étendue.

L'image la moins réfractée, *b c*, est rouge, et la plus réfractée, *b" c"*, violette : les images entre ces deux limites (comme *b' c'*) sont d'une couleur intermédiaire, telle que le jaune, par exemple. Au-dessous de *b"* il n'y a point d'images, de manière que tout l'espace au-dessous de *b"* paraîtra noir quand on le regardera à travers le prisme.

D'un autre côté, les images de chaque couleur au-dessus de *b* coexistent, puisque l'on suppose que l'espace lumineux *b c* s'étend indéfiniment au-dessus de B : par conséquent, l'espace au-dessus de *b* dans l'image réfractée sera d'une entière blancheur. En allant de *b* vers *b"*, il y aura une diminution générale de lumière, parce que le nombre des images qui se superposent deviendra de plus en plus petit. De plus, les rayons les plus réfrangibles du spectre y seront en excès; car, au-delà de *b*, il n'y a plus de rayons rouges, au-delà de *b'* de rayons jaunes, et ainsi de suite. La couleur qui s'étendra le plus loin, c'est-à-dire jusqu'en *b"*, sera le violet pur.

Ainsi la lumière ne décroîtra pas seulement en intensité, mais la perte successive des rayons les moins réfrangibles du spectre lui donnera une teinte de plus en plus bleue, jusqu'au violet; de manière que le bord supérieur de l'objet obscur paraîtra garni d'une frange bleue, qui deviendra de plus en plus pâle, jusqu'à ce qu'elle passe au blanc. Ce sera le contraire pour l'extrémité inférieure A. L'espace lumineux A D forme pareillement une série d'images colorées, *a d*, *a' d'*, *a" d"*, dont la moins déviée est l'image rouge *a d*, et la plus déviée l'image violette *a" d"*. Le point *a*, qui n'est éclairé que

par les rayons rouges extrêmes, paraîtra donc d'un rouge sombre; a', qui le sera par tous les rayons, depuis le rouge jusqu'au jaune (par exemple), sera d'un rouge-orangé très vif; mais, à mesure que les rayons les plus réfrangibles viendront se joindre aux premiers, la teinte rougeâtre s'affaiblira, et la partie inférieure a'', où tous les rayons se trouveront dans leur proportion naturelle, sera tout-à-fait blanche. Ainsi le bord inférieur d'un objet obscur sera frangé de rouge, de même que le bord supérieur l'était de bleu. Ces franges ôtent aux contours de l'objet toute leur netteté, et rendent la vision confuse; mais ce phénomène cesse aussitôt que l'on éclaire l'objet avec une lumière homogène, ou qu'on le regarde à travers une substance colorée qui ne laisse passer que des rayons homogènes.

430. — L'œil peut très bien juger de la destruction des couleurs et de la netteté des contours des objets quand les prismes sont disposés de manière à agir en sens contraire (art. 426 et 427); mais leurs effets ne se compensent jamais exactement, et il reste d'un côté une petite frange pourpre et de l'autre une frange verte. Cette imperfection tient à des causes que nous allons discuter. Les pouvoirs dispersifs obtenus par cette méthode peuvent comporter ainsi des erreurs plus ou moins considérables, ce qui rend ce genre d'appréciations peu susceptible d'exactitude.

431. — Pour déterminer le pouvoir dispersif d'un milieu, après lui avoir donné la forme d'un prisme, l'on commencera par mesurer avec le goniomètre ou autrement son angle réfringent, et par s'assurer de son indice de réfraction. L'on cherchera ensuite quel est l'angle qu'il faut donner à un prisme d'un milieu connu, qui sert de terme de comparaison, pour que les dispersions produites par les deux prismes se compensent, et que la lumière réfractée soit aussi blanche que possible; mais comme on ne peut avoir pour chaque milieu un prisme compensateur, l'on a cherché à faire varier

par degrés insensibles l'angle réfringent d'un même prisme. C'est à quoi l'on parvient de plusieurs manières. D'abord, l'on peut se servir d'un prisme composé de deux plateaux de verre parallèles, attachés ensemble avec des pentures, et renfermant quelques gouttes d'un liquide qui ne peut s'échapper à cause de la capillarité : s'il y a beaucoup de liquide on joindra les plateaux avec une charnière métallique très serrée. Cette construction est sujette à mille inconvénients dans la pratique.

L'on peut encore faire usage de deux prismes de même verre, dont l'un ait une face cylindrique concave, et l'autre une face convexe de même rayon. En faisant coïncider les surfaces courbes, l'on pourra donner aux faces rectilignes toutes les inclinaisons possibles par la rotation des deux prismes autour de l'axe du cylindre. (Voy. la fig. 100, où *a* et *b* représentent deux de ces prismes d'une construction un peu différente.) Cette idée, que nous croyons appartenir à Boscovich, est ingénieuse, mais d'une exécution difficile, et sujette à beaucoup d'inexactitude.

432. — La méthode suivante réussit parfaitement, et nous l'avons trouvée d'un usage très commode dans la pratique.

L'on a un prisme de bon flint-glass dont la section perpendiculaire à l'arète est un triangle rectangle A B C (fig. 101), dans lequel A est d'environ 30 ou 35 degrés et C l'angle droit. La longueur de ce prisme est double de la largeur de la face A C : on polira cette face ainsi que l'hypothénuse du prisme jusqu'à ce qu'elles deviennent exactement planes; puis l'on partagera le verre de manière à former deux prismes égaux dont chacun ait une face carrée, et dont les angles réfringents A et A′ seront naturellement égaux. L'on collera ensemble les faces carrées avec du mastic; de telle sorte que les arètes A, A′, soient opposées dans le carré commun. Faisant tourner alors tout le solide autour d'un axe perpendiculaire à la surface commune et passant par son centre, l'on abattra les angles pendant la rotation, jusqu'à

ce qu'il ait pris la forme d'un cylindre terminé aux deux bouts par des ellipses parallèles, comme dans la fig. 101. Alors on détachera les prismes en chauffant le mastic, et l'on enchâssera chacun d'eux séparément dans une lame de cuivre, comme dans la fig. 102, de manière que leurs bases circulaires soient en contact, et qu'ils puissent tourner librement l'un sur l'autre autour de leur centre commun. Le prisme inférieur est fixé au centre d'un cercle gradué DE; tandis que l'armure du prisme supérieur ou mobile est garnie d'une alidade portant un vernier qui donne les dixièmes de degré et même les minutes, s'il est nécessaire. Tout l'appareil est suspendu entre deux branches, où il peut osciller librement, et le limbe peut glisser dans des rainures pratiquées aux points d'appui, en tournant dans son propre plan, ce qui permet de donner au prisme composé toutes les positions que l'on veut pour recevoir le rayon incident dans un plan et sous une inclinaison quelconques. Il est évident que l'angle réfringent est rigoureusement nul quand les prismes sont opposés et le vernier sur zéro, comme dans la fig. 102. Si l'on fait tourner l'instrument de 180°, les prismes agissant dans le même sens, leur angle commun sera double de l'angle d'eux en particulier de chacun. Dans les situations intermédiaires, l'angle entre les plans de leurs faces extérieures doit passer par tous les degrés de grandeur entre zéro et l'angle commun : or la trigonométrie sphérique nous apprend que, si θ est l'angle donné par le vernier ou l'angle de rotation des prismes l'un sur l'autre, à compter du zéro vrai, l'angle du prisme composé se déduira de l'équation

$$\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin (A), \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

dans laquelle (A) est l'angle réfringent de chaque prisme, et A l'angle du prisme composé.

433. — Pour se servir de cet instrument, l'on place le prisme A', dont on veut comparer le pouvoir dispersif à ce-

lui du milieu (A), de manière que son arète soit horizontale et le plus bas possible, devant une fenêtre dont on regarde un barreau horizontal, en faisant mouvoir le prisme jusqu'à ce que la réfraction de ce barreau soit la moindre possible, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'image soit stationnaire quand on donne au prisme un léger mouvement en avant ou en arrière. L'on prend alors le prisme composé, que l'on amène sur le zéro et dans une position verticale sur le cercle; puis on le met derrière le premier prisme. On écarte son index de quelques degrés du zéro, et l'on fait tourner le cercle gradué dans son propre plan jusqu'à ce que la réfraction produite par le second prisme soit opposée à celle du premier. La coloration sera plus faible qu'auparavant. L'on continuera ainsi jusqu'à ce que les couleurs se compensent à peu près; alors, au moyen du mouvement d'oscillation et de celui de rotation autour de l'axe vertical, l'on ajustera l'appareil de telle sorte que deux des barreaux de la fenêtre, l'un horizontal et l'autre vertical, paraissent se couper à angles droits, en les regardant à travers les deux prismes.

Un peu d'habitude rend cette opération très aisée, quoiqu'elle semble assez difficile au premier abord. L'on achèvera alors la compensation des couleurs; et, après avoir vérifié par la même épreuve la position du prisme composé, et noté l'arc parcouru sur le limbe, l'on calculera l'angle cherché A au moyen de l'équation (*b*). On peut s'éviter cette peine en formant une table des valeurs de A correspondant à celles de θ (en supposant toujours que celle de (A) soit déterminée préalablement par des mesures très exactes), ou en divisant le cercle, non en parties égales de θ, mais en valeurs correspondantes de A, afin d'y lire immédiatement l'angle demandé.

434. — Dans son ingénieux traité *sur de nouveaux instruments de physique*, ouvrage qui contient une foule d'inventions curieuses et d'applications utiles, le docteur Brewster propose une méthode plus simple et meilleure, au total, de

déterminer les pouvoirs dispersifs de deux prismes : elle consiste à faire varier, non l'angle réfringent du prisme compensateur, mais la direction dans laquelle le rayon se disperse.

Supposons que l'on puisse produire avec une ligne de lumière blanche une frange colorée, en employant un prisme de comparaison disposé de telle manière que les couleurs occupent le même espace angulaire dans cette frange que dans celle que produirait un prisme d'un pouvoir dispersif inconnu : il est clair qu'en faisant réfracter la frange par ce dernier prisme, *dans une direction perpendiculaire à sa largeur et opposée à l'ordre de ses couleurs*, cette nouvelle réfraction doit compenser la première et détruire la coloration : par conséquent, si l'on connaît la position du prisme compensateur, la dispersion due au premier pourra être calculée.

Pour y parvenir, soit AB (fig. 103) une ligne lumineuse horizontale d'une longueur considérable, et supposons-la réfractée par en bas, mais obliquement, dans la direction A a, B b, par un prisme de comparaison dont le pouvoir dispersif est plus grand que celui du prisme dont il s'agit : il se formera ainsi un spectre oblique $a\,b\,b'\,a'$, $a\,b$ étant le rouge et $a'\,b'$ le violet. La largeur angulaire de cette frange colorée sera

$a\,m = a\,a' \times$ le sinus de l'angle entre le plan de réfraction et l'horizon.

Maintenant, si le prisme dont on veut mesurer le pouvoir dispersif réfracte verticalement par en haut cette bande colorée, et si le plan de première réfraction est tellement incliné sur l'horizon que l'angle dont l'œil est le sommet, et qui est sous-tendu par $a\,m$, soit justement égal à l'angle de dispersion de l'autre prisme, toutes les couleurs de la portion rectangulaire $b\,c\,a'\,d$ se confondront dans la ligne horizontale A'B', qui paraîtra incolore, excepté en A' et en B', où

les triangles colorés aca', bdb', rendront rouge l'extrémité A′ A″, et bleue l'extrémité B′ B″.

Ainsi, le second prisme demeurant fixe et son arète horizontale au point le plus bas, l'on fera tourner graduellement le premier, ou le prisme de comparaison, dans le plan perpendiculaire à sa section principale, jusqu'à ce qu'on trouve à la fin une position où la ligne deux fois réfractée A′ B′ paraisse incolore en haut et en bas. L'on arrêtera alors le prisme, et l'angle d'inclinaison de son arète sur l'horizon sera le complément de l'angle $aa'm$, que nous appellerons θ.

Supposons maintenant les deux prismes dans leur lieu de moindre déviation : comme il est indifférent que l'un ou l'autre prisme soit le premier, mettons le prisme à examiner vis-à-vis de l'objet (1). Alors, D′ et D étant les déviations totales que le prisme fixe et le prisme mobile font éprouver au rayon rouge, nous aurons

$$\delta D' - \delta D \,.\, \sin\theta = 0\,,$$

ou

$$\delta\mu' \,.\, \sin\frac{A'}{2} \,.\, \text{séc}\,\frac{A'+D'}{2} = \delta\mu \,.\, \sin\frac{A}{2} \,.\, \text{séc}\,\frac{A+D}{2}\,\sin\theta\,;$$

d'où l'on tire

$$\frac{p'}{p} = \frac{\delta\mu'}{\delta\mu} \cdot \frac{\mu-1}{\mu'-1} = \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu-1}{\mu'-1} \cdot \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A+D)}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(A'+D')} \,.\, \sin\theta\,, \qquad (c)$$

les angles $\frac{1}{2}(A+D)$ et $\frac{1}{2}(A'+D')$ étant donnés par les équations

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+D) = \mu \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A\,, \quad \sin\tfrac{1}{2}(A'+D') = \mu' \,.\, \sin\tfrac{1}{2}A'.$$

(1) Le docteur Brewster a choisi une position un peu différente (traité *Sur de nouveaux instruments*, etc., page 296), dans la vue de simplifier les formules ; mais il nous semble que l'on ne gagne rien de ce côté par cet arrangement.

La formule (c) fournit donc le rapport des pouvoirs dispersifs des deux prismes, connaissant d'ailleurs leurs indices de réfraction ainsi que l'angle θ.

435. — Par ces méthodes, ou d'autres semblables, on peut comparer le pouvoir dispersif d'un milieu quelconque à celui d'un certain milieu auquel on convient de rapporter tous les autres. Si le milieu que l'on veut examiner est solide, on lui donnera la forme d'un prisme; s'il est fluide, on le versera dans un prisme de verre creux dont on mesurera exactement les angles, et qui pourra servir pour tous les liquides. Mais, pour assigner directement la dispersion du prisme de comparaison, il nous faut prendre une autre marche. Celle qui se présente la première à l'esprit, c'est de mesurer immédiatement la longueur du spectre solaire produit par un prisme d'un angle réfringent donné; mais la lumière du spectre s'affaiblit si fort à ses extrémités, son étendue visible varie si énormément avec l'éclat du soleil et l'exclusion plus ou moins totale de la lumière étrangère, qu'on ne saurait rien conclure de pareilles mesures. Néanmoins, si l'on détruit les rayons les plus éclatants du spectre, et que l'on garantisse l'œil de toute lumière superflue au moyen d'un verre qui ne laisse passer que les rayons rouges extrêmes et violets extrêmes (voy. dans la table le mot *Absorption*), ce procédé peut donner des résultats assez satisfaisants. Voici une méthode, fondée sur le même principe, que l'auteur de ce traité a publiée dans les *Transactions de la société royale d'Edimbourg*, vol. IX.

Soient A et B (fig. 104) deux fentes verticales et rectangulaires dans un écran placé devant une fenêtre: l'une de ces fentes est deux fois aussi longue que l'autre, et s'en trouve à une distance connue. L'œil restant dans la situation décrite plus haut, supposons que les fentes soient réfractées par un prisme vertical dans son lieu de déviation minimum: alors on verra une image rouge a, b, et une image violette a', b', de chacune d'elles. Eloignons maintenant le prisme de

l'écran (ou *vice versâ*), en lui conservant toujours sa position de moindre déviation, jusqu'à ce que l'image violette de la fente la plus longue tombe exactement sur l'image rouge de la plus courte, comme *a' b* dans la figure. Il est évident que la distance entre les fentes, divisée par leur distance du prisme, est le sinus de l'angle total de dispersion, ou δ D. Comme on a d'ailleurs

$$\delta \mu = \frac{\delta D}{2} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} (A + D)}{\sin \frac{1}{2} A},$$

l'on connaît aussi $\frac{\delta \mu}{\mu - 1}$ ou *p*, c'est-à-dire le pouvoir dispersif.

436. — Mais toutes ces méthodes ne sont que des approximations grossières, et c'est ce que prouve assez le peu d'accord de leurs résultats. Ainsi les dispersions de diverses espèces de flint-glass, obtenues par la dernière méthode, surpassent de près d'un sixième celles que leur attribue le docteur Brewster.

La seule méthode qui mérite quelque confiance est celle de Fraunhofer, pourvu que l'on puisse se procurer les milieux en assez grande abondance et dans un état de pureté suffisante : elle consiste à déterminer avec une précision astronomique, et par des mesures directes, les valeurs de μ pour chaque point d'une réfrangibilité donnée dans le spectre et fixé de position soit par les raies noires, soit par les phénomènes des flammes colorées ou des milieux absorbants. (Voy. la table, aux mots *Flammes, Absorption.*) En profitant des propriétés de ces milieux, un rayon rouge d'une réfrangibilité rigoureusement déterminée peut être isolé d'une manière très facile. S'il est tellement rapproché de l'extrémité du spectre qu'on ne puisse l'apercevoir qu'en éteignant les rayons plus éclatants, on peut le prendre pour point de départ dans les recherches d'optique, quand même, avec certaines précautions et dans des circonstances favorables, on pourrait distinguer une bande encore moins réfrangible : c'est ce

rayon que nous conviendrons d'appeler le *commencement du spectre* ou le *rouge extrême*.

En jetant un peu de sel dans une flamme, on peut obtenir de la même manière un rayon jaune parfaitement caractérisé, et, ce qui est très remarquable, occupant dans l'échelle de réfrangibilité absolnmcnt la même place que la raie noire D (art. 418, 419) dans le spectre solaire.

Par ces divers moyens, et à l'aide des lignes fixes dont nous avons déjà parlé, on peut, avec un bon appareil, reconnaître l'identité des rayons en tous temps et en toutes circonstances; ce qui porte la doctrine des pouvoirs réfringents et dispersifs au rang des parties les plus avancées de la science.

437. — La table suivante, extraite de l'ouvrage de Fraunhofer intitulé *Essai sur la détermination des pouvoirs réfringents et dispersifs*, etc., contient les valeurs absolues de l'indice de réfraction μ pour tous les rayons dont les places dans le spectre correspondent aux sept lignes B, C, D, E, F, G, H. Fraunhofer s'est servi de ces valeurs pour caractériser plusieurs espèces de verres de sa manufacture, ainsi que certains liquides. Nous désignerons ces valeurs par μ (B), μ (C), μ (D), etc., afin de les distinguer.

TABLE des indices de réfraction de différentes espèces de verres et de liquides, pour les sept raies principales.

MILIEU RÉFRINGENT.	POIDS spécifiq.	VALEURS DE						
		μ (B)	μ (C)	μ (D)	μ (E)	μ (F)	μ (G)	μ (H)
Flint-glass n° 13.	3.723	1.627749	1.629681	1.635036	1.642024	1.648260	1.660285	1.671062
Crown-glass n° 9	2.535	1.525832	1.526849	1.529587	1.533005	1.536052	1.541657	1.546566
Eau.	1.000	1.330935	1.331712	1.333577	1.335851	1.337818	1.341293	1.344177
Eau (d'après une autre expérce).	1.000	1.330977	1.331709	1.333577	1.335849	1.337788	1.341261	1.344162
Solution de potasse	1.416	1.399629	1.400515	1.402805	1.405632	1.408082	1.412579	1.416368
Huile de térébenthine . . .	0.885	1.470496	1.471530	1.474434	1.478353	1.481736	1.488198	1.493874
Flint-glass n° 3	3.512	1.602042	1.603800	1.608494	1.614532	1.620042	1.630772	1.640373
Flint-glass n° 30.	3.695	1.623570	1.625477	1.630585	1.637356	1.643466	1.655406	1.666072
Crown-glass n° 13	2.535	1.524312	1.525299	1.527982	1.531372	1.534337	1.539908	1.544684
Crown-glass lettre M . . .	2.756	1.554774	1.555933	1.559075	1.563150	1.566741	1.573535	1.579470
Flint-glass n° 23, Prisme de 60° 15′ 42″.	3.724	1.626596	1.628469	1.633667	1.640495	1.646756	1.658848	1.669686
Flint-glass n° 23, Prisme de 45° 23′ 14″.	3.724	1.626564	1.628451	1.633666	1,640544	1.646780	1.658849	1.669680

438. — Cette table met en évidence une particularité reconnue depuis long-temps par les opticiens, et qui est d'une grande importance pour la construction des lunettes : c'est l'*irrationalité* (comme on l'appelle) ou le défaut de proportionnalité des espaces occupés par les couleurs dans les spectres produits par différents milieux. L'on pourrait choisir l'eau pour terme de comparaison, d'autant plus que c'est à ce milieu que l'on rapporte tous les autres dans une foule de recherches physiques, en la prenant à une température donnée, celle de sa plus grande densité, par exemple. On signalerait un rayon quelconque en assignant son indice de réfraction à l'égard de l'eau, et l'on formerait ainsi une échelle de réfrangibilité que nous appellerons, pour abréger, *échelle de l'eau.* Dès que l'on connaîtrait donc l'indice de réfraction d'un rayon passant du vide dans l'eau, l'on aurait sur-le-champ sa place dans le spectre formé par ce milieu, sa couleur et ses autres propriétés physiques, en tant qu'elles dépendent de la réfrangibilité : ainsi, 1.333577 étant l'indice de réfraction d'un certain rayon à l'égard de l'eau, ce rayon ne peut être autre que D, dont la couleur est un jaune pâle et orangé, qui manque tout-à-fait dans la lumière solaire, et que certaines flammes donnent avec abondance.

Soit x l'indice de réfraction d'un rayon quelconque lorsqu'il traverse l'eau, ou sa place dans l'échelle de l'eau. Il est évident que l'indice de réfraction pour tout autre milieu doit être une fonction de x, puisque cette quantité détermine le degré de réfrangibilité et toutes les autres propriétés du rayon. Nous devons donc avoir entre μ et x une équation qui pourra être représentée généralement par

$$\mu = \mathrm{F}\ (x),$$

$\mathrm{F}\ (x)$ dénotant une fonction de x.

439. — Pour déterminer la forme de cette fonction, en observant que A est un très petit angle d'un prisme, et D la déviation minimum qu'il produit, nous avons

$$\mu \cdot \frac{A}{2} = \frac{A + D}{2}$$

$$\text{ou } D = (\mu - 1) A.$$

D'où il résulte qu'en supposant une valeur constante à l'angle A, la déviation est proportionnelle à $\mu - 1$. Or, puisque dans tous les milieux, aussi-bien que dans l'eau, les déviations conservent le même ordre, étant toujours plus faibles pour le rouge et plus fortes pour le violet, il s'ensuit que, dans tous les milieux, $\mu - 1$ croît avec x : de manière qu'en nommant, pour l'échelle de l'eau, x_o l'indice de réfraction du premier rayon rouge que l'on aperçoit ou la première valeur de x, et μ_o l'indice de ce même rayon pour un autre milieu, $(\mu - 1) - (\mu_o - 1)$ ou $\mu - \mu^o$ doit croître avec $x - x_o$; et, puisque ces quantités s'évanouissent ensemble, on peut exprimer la première en série, en fonction des puissances successives de la seconde multipliées par des coëfficients indéterminés, et poser

$$\mu - \mu_o = A(x - x_o) + B(x - x_o)^2 + C(x - x_o)^3 + \text{etc.}$$

ou, ce qui revient au même, *a*, *b*, etc., étant d'autres coëfficients indéterminés, et $x_o - 1$ étant nécessairement une quantité constante,

$$\frac{\mu - \mu_o}{\mu^o - 1} = a \cdot \frac{x - x_o}{x_o - 1} + b \cdot \left(\frac{x - x_o}{x_o - 1}\right)^2 + \text{etc.} \quad (d)$$

440. — L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur les valeurs *a*, *b*, etc., c'est de supposer $a = 1$; et *b*, ainsi que tous les autres coëfficients $= 0$: il vient alors

$$\frac{\mu - \mu_o}{\mu_o - 1} = \frac{x - x_o}{x_o - 1}.$$

Nous avons déjà noté par $\delta\mu$ ce que nous représentons ici par $\mu - \mu_o$, c'est-à-dire la différence entre l'indice de réfraction d'un rayon quelconque et celui du rayon initial, et par $\frac{\delta\mu}{\mu - 1}$ la même quantité que désigne ici $\frac{\mu - \mu_o}{\mu_o - 1}$. Telle

est, dans l'hypothèse précédente, l'expression du pouvoir dispersif d'un milieu. L'équation que nous discutons maintenant nous apprend que ce pouvoir dispersif devrait toujours être le même que celui de l'eau, et par conséquent le même pour tous les milieux : ce qui est contraire à l'expérience, comme nous l'avons déjà vu.

Après l'hypothèse précédente, la plus simple est de regarder a comme une constante arbitraire déterminée par la nature du milieu, en faisant toujours $b, c,$ etc. $= 0$. L'équation (d) se réduit alors à

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - 1} = a \frac{x - x_0}{x_0 - 1} :$$

par conséquent, μ' et x' étant d'autres valeurs correspondantes de μ et de x, l'on aura également

$$\frac{\mu' - \mu_0}{\mu_0 - 1} = a \frac{x' - x_0}{x_0 - 1} \text{ et } \frac{\mu' - \mu}{\mu_0 - 1} = a \frac{x' - x}{x_0 - 1} ;$$

d'où

$$\frac{\mu' - \mu}{x' - x} = a \frac{\mu_0 - 1}{x_0 - 1}.$$

Si l'hypothèse était juste, et que μ, x, μ', x', fussent deux couples d'indices de réfraction correspondants pour des rayons situés d'une manière quelconque, la fraction $\frac{\mu' - \mu}{x' - x}$ serait invariable. La table précédente montre cependant qu'il n'en est pas ainsi. Pour le flint-glass n° 13, par exemple, la comparaison des deux rayons B et C donne 2.562 pour valeur du rapport en question ; et, si l'on compare de la même manière les rayons C et D, D et E, E et F, F et G, G et H, l'on trouvera pour ce même rapport les nombres 2.871, 3.073, 3.193, 3.460, 3.726, dont l'inégalité et l'accroissement progressif prouvent l'incompatibilité de notre hypothèse avec la véritable loi de la nature. En faisant les mêmes rapprochements avec d'autres milieux pris pour termes de comparaison, l'on trouvera les résultats les plus dis-

semblables : ainsi le flint-glass n° 13 étant comparé à l'huile de térébenthine, l'on tombe sur la série 1.868, 1.844, 1.783, 1.843, 1.861, 1.899, qui décroît d'abord jusqu'au minimum 1.783, puis recommence à croître à partir de cette valeur.

441. — Il suit de ce qui précède que la proportion que gardent entre eux les espaces colorés (ou les intervalles BC, CD, DE, etc.) n'est pas la même pour les spectres dus à des milieux différents : ainsi, en prenant pour couleur moyenne le rayon vert E, et comprenant sous le nom de *rouge* toute la partie du spectre qui se trouve du côté rouge de E, et sous le nom de *bleu* tout l'autre côté, le rapport des espaces occupés par le rouge et par le bleu, dans un spectre quelconque, sera représenté par la fraction

$$\frac{\mu(H) - \mu(E)}{\mu(E) - \mu(B)},$$

dont les valeurs pour les milieux de la table précédente sont :

Flint n° 23. . . .	2.0922	Crown M	1.9484
Flint n° 30. . . .	2.0830	Crown n° 9 . . .	1.8905
Flint n° 3	2.0689	Crown n° 13 . . .	1.8855
Flint n° 13. . . .	2.0342	Solution de potasse .	1.7884
Huile de térébenthe.	1.9754	Eau	1.6936

Ce qui nous fait voir que les mêmes espaces colorés qui, dans le spectre du flint n° 23, sont dans le rapport de 21 : 10, sont pour le spectre de l'eau dans celui de 17 : 10 (à peu près) ; de manière que la partie bleue est d'une étendue beaucoup plus grande, par rapport au rouge, pour le flint-glass que pour l'eau.

442. — Supposons deux prismes de matière différente (comme l'eau et le flint-glass), tels que leurs réfractions se fassent en sens contraire, et que leurs angles réfringents donnent des spectres de même longueur : le rouge et le violet se réuniront, à la vérité, dans le rayon émergent ; mais les

rayons intermédiaires n'en éprouveront pas moins une certaine dispersion, le prisme d'eau réfractant le vert ou les rayons intermédiaires beaucoup plus que les rayons extrêmes. Par conséquent, une ligne de lumière blanche étant examinée à travers un pareil système, au lieu de paraître incolore, elle formera un spectre très étroit par rapport à celui que produirait chaque prisme en particulier : l'un des côtés de ce spectre sera rouge et l'autre vert. Un objet *obscur* qui se projette sur le ciel (comme un barreau de fenêtre) paraîtra frangé de pourpre et de vert ; cette dernière couleur sera du même côté du barreau que le sommet du prisme de flint-glass, parce que, dans une telle combinaison, le vert doit être considéré comme la couleur la plus réfrangible. Le prisme de flint-glass réfractant moins dans ce cas, la couleur la plus réfrangible doit se trouver vers son sommet, puisque c'est de ce côté de la barre que la réfraction est la moindre, par la même raison qu'un objet obscur vu sur un fond blanc, à travers un seul prisme, paraît bordé de bleu du côté où la réfraction est la moins forte. (Art. 429.)

443. — Ce résultat se confirme par l'observation. Clairaut, et, après lui, Boscovich, le docteur Blair et le docteur Brewster, ont ramené plusieurs fois l'attention des physiciens sur ces franges colorées, qu'ils ont nommées *spectres secondaires*, et dont ils ont démontré l'existence de la manière la plus convaincante. Le docteur Brewster, en particulier, en a fait le sujet d'une série d'expériences extrêmement importantes, décrites dans son *Traité sur de nouveaux instruments de physique* et dans un mémoire inséré dans les *Transactions d'Édimbourg* : il résulte de ses expériences qu'en formant avec deux milieux quelconques, compris dans la liste qui va suivre et réfractant la lumière en sens contraire, deux prismes composés qui réunissent les rayons rouges et les rayons violets, le vert sera dévié de la direction du faisceau émergent et se rapprochera de celle du rayon réfracté par le milieu qui précède l'autre dans le tableau que voici :

1. *Acide sulfurique.*
2. Acide phosphorique.
3. Acide sulfureux.
4. Acide phosphoreux.
5. Hydrogène sur-sulfuré.
6. *Eau.*
7. Glace.
8. Blanc d'œuf.
9. Cristal de roche.
10. Acide nitrique.
11. Acide prussique.
12. Acide muriatique.
13. Acide nitreux.
14. Acide acétique.
15. Acide malique.
16. Acide citrique.
17. Spath fluor.
18. Topaze (bleue).
19. Béril.
20. Sélénite.
21. Leucite.
22. Tourmaline.
23. Borax.
24. Borax (verre de).
25. Ether.
26. Alcool.
27. Gomme arabique.
28. *Crown-glass.*
29. Huile d'amandes douces.
30. Soude et tartrate de potasse.
31. Gomme de genièvre.
32. Sel gemme.
33. Spath calcaire.
34. Huile d'ambre gris.
35. Huile de genièvre.
36. Huile de spermacéti.
37. Huile de navette.
38. Huile d'olive.
39. Zircon.
40. *Flint-glass.*
41. Huile de Rhodes.
42. Huile de romarin.
43. Huile de sainfoin.
44. Baume de copahu.
45. Huile de noix.
46. Huile de sabine.
47. Huile de rue.
48. Huile de faîne.
49. Nitrate de potasse.
50. Diamant.
51. Résine.
52. Gomme copal.
53. Huile de castor.
54. Huile de camomille.
55. Huile d'aneth.
56. Huile d'absinthe.
57. Huile de marjolaine.
58. Huile de bergamotte.
59. Huile de menthe.
60. Huile de thym.
61. Huile de muscade.
62. Huile de carvi.
63. Huile de citron.
64. Ambre.
65. Huile de menthe crépue.
66. Huile d'hysope.
67. Huile de pavot.
68. Huile de pouliot.
69. Huile de sauge.
70. Huile de térébenthine.
71. Baume du Canada.
72. Huile de lavande.
73. Muriate d'antimoine.
74. Huile de clous de girofle.
75. Huile de fenouil.
76. Verre de couleur rouge.
77. Verre orangé.
78. Verre opale.
79. Acétate de plomb (dissous).
80. Huile d'ambre.
81. Huile de sassafras.
82. Huile de cumin.
83. Huile d'anis.
84. Huile essentielle d'amandes amères.
85. Carbonate de plomb.
86. Baume de Tolu.
87. Sulfure de carbone.
88. Soufre.
89. Huile de casse.

444. — L'on voit par cette table qu'en général, plus un milieu est réfringent, plus la partie bleue dans le spectre a d'étendue par rapport au rouge.

445. — Si deux prismes, ayant des angles réfringents convenables, et formés par des milieux peu éloignés l'un de l'autre dans le tableau précédent, agissent en sens contraire, le spectre secondaire sera fort petit et la lumière réfractée presque entièrement incolore : une semblable combinaison est dite *achromatique* (α-χρωμα).

446. — L'existence d'un spectre secondaire rendant l'achromatisme parfait impossible à obtenir avec deux milieux seulement, l'on voit aussi qu'on ne peut négliger, en théorie, les coëfficients b, c, etc., de l'équation (d), art. 439.

La loi de la nature exige probablement que la série soit continuée à l'infini : si, pour réunir trois rayons, l'on emploie trois prismes de matière différente, l'on aura des spectres *tertiaires*, et ainsi de suite ; mais ces nouveaux spectres seront nécessairement de plus en plus petits.

447. — La table (art. 437) nous fournit les moyens de calculer les coëfficients d'où dépendent ces spectres, pour tous les milieux qui s'y trouvent.

Posant

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 - 1} = \mathrm{P}, \quad \frac{x - x_0}{x_0 - 1} = p,$$

et regardant

$$\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'', p, p', p'',$$

comme les valeurs de P et de p correspondant à chaque valeur de μ et de x rapportée dans la table, nous aurons, pour déterminer a, b, c, etc., à l'égard d'un de ces milieux, les équations

$$P = a p + b p^2 + c p^3 + \text{etc.},$$
$$P' = a p' + b p'^2 + c p'^3 + \text{etc.},$$
$$P'' = a p'' + b p''^2 + c p''^3 + \text{etc.},$$

et l'on écrira autant d'équations semblables que l'on voudra déterminer de coëfficients.

En nous bornant à deux, il vient

$$P = a p + b p^2, \; P' = a p' + b p'^2;$$

d'où

$$a = \frac{P p'^2 - P' p^2}{p p' (p' - p)}, \quad b = - \frac{P p' - P' p}{p p' (p' - p)}.$$

Comme il est préférable de choisir des rayons aussi éloignés que possible dans le spectre, nous tirerons μ_0 et x_0 de la colonne μ (B), et nous nous servirons de la colonne μ (E) pour P et p, et de μ (H) pour P′ et p'. Nous tomberons alors sur les résultats suivants :

MILIEUX DIRIMANTS.	Pouvoirs dispersifs du premier ordre, celui de l'eau étant 1.000.	Pouvoirs dispersifs du second ordre, celui de l'eau étant 0.000.
Flint-glass n° 13	$a = +$ 1.42580	$b = +$ 7.57705
Crown-glass n° 3	0.88419	2.34915
Eau	1.00000	0.00000
Solution de potasse	0.99626	1.13262
Huile de térébenthe.	1.06149	4.58659
Flint-glass n° 3	1.29013	7.63048
Flint-glass n° 30	1.37026	8.44095
Crown-glass n° 13	0.87374	2.49199
Crown-glass lettre M.	0.90131	3.49000
Flint-glass n° 23	1.37578	8.66904

Problème.

448. — Assigner la relation analytique qui doit exister en-

tre deux prismes pour que leur assemblage soit *achromatique*, c'est-à-dire pour qu'ils réfractent un rayon blanc sans le colorer.

Reprenant les équations et la notation de l'art. 215, puisque les prismes se trouvent dans le vide, nous n'avons qu'à substituer dans ces équations μ, $\frac{1}{\mu}$, μ' et $\frac{1}{\mu'}$, au lieu de μ, μ', μ', μ'''; alors il viendra

$$\left.\begin{array}{r} \mu \sin \rho = \sin \alpha \\ \alpha' = \mathrm{I} + \rho \\ \sin \rho' = \mu \sin \alpha' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mu' \sin \alpha''' = \sin \rho''' \\ \rho'' = -\mathrm{I}'' + \alpha''' \\ \sin \alpha'' = \mu' \,.\, \sin \rho'' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\text{et } \alpha'' = \mathrm{I}' + \rho', \; \mathrm{D} = \alpha + \mathrm{I} + \mathrm{I}' + \mathrm{I}'' - \rho'''.$$

Maintenant, puisque, par hypothèse, les rayons incident et émergent sont tous deux incolores, il faut avoir

$$\delta \alpha = 0 \text{ et } \delta \mathrm{D} = 0,$$

c'est-à-dire $\delta \rho''' = 0$, le signe δ se rapportant au changement de plan du rayon dans le spectre : d'où il suit que les deux systèmes d'équations (1) et (2) sont d'une forme absolument semblable, le premier étant composé en $\rho, \alpha, \alpha', \rho'$, comme le second l'est en $\alpha''', \rho''', \rho', \alpha''$. Or le premier système donne

$$\delta \mu \,.\, \sin \rho + \mu \,\delta \rho \,.\, \cos \rho = 0, \quad \delta \alpha' = \delta \rho,$$
$$\delta \rho' \cos \rho' = \delta \mu \,.\, \sin \alpha' + \mu \,\delta \alpha' \,.\, \cos \alpha';$$

et, après les éliminations et réductions,

$$\delta \rho' = \frac{\sin \mathrm{I}}{\cos \rho \,.\, \cos \rho'} \,\delta \mu \quad \ldots\ldots \quad (e)$$

En vertu de cette valeur de $\delta\rho'$ et de l'analogie des deux systèmes d'équations dont nous venons de parler,

$$\delta\alpha'' = -\frac{\sin I''}{\cos\alpha''' \cdot \cos\alpha''}\,\delta\mu' \quad . \; . \; . \quad (f)$$

Mais comme

$$\alpha'' = I' + \rho',$$

nous avons

$$\delta\rho' = \delta\alpha'';$$

d'où résulte finalement

$$\frac{\cos\rho \cdot \cos\rho'}{\cos\alpha''' \cdot \cos\alpha''} = -\frac{\sin I}{\sin I''} \cdot \frac{\delta\mu}{\delta\mu'} \quad . \; . \; . \quad (g)$$

La propriété exprimée par cette équation peut être énoncée de la manière suivante :

Concevons le rayon comme émanant d'un point de sa route entre les deux prismes : pour que la combinaison soit achromatique, *les produits des cosinus des angles d'incidence sur les surfaces de chaque prisme doivent être entre eux comme les sinus des angles réfringents, multipliés respectivement par la différence entre l'indice de réfraction pour le rouge et l'indice pour le violet.* Les prismes doivent, en outre, réfracter en sens opposés, et leurs angles réfringents I et I'' doivent être de signe contraire.

449. — En combinant cette équation avec (1), (2), et $\alpha'' = I' + \rho'$ qui fixe la position relative des prismes, l'on pourra résoudre algébriquement tous les problèmes de cette espèce ; mais les équations finales sont le plus souvent trop compliquées pour être résolues directement. Néanmoins, les résultats auxquels nous sommes déjà parvenus nous fourniront quelques remarques. D'abord, ρ' étant l'angle de réfraction à la seconde surface du premier prisme, $\delta\rho'$ est la largeur angulaire du spectre qui en résulte : toutes choses égales, d'ailleurs, celle-ci est donc proportionnelle au produit des sécantes des angles de réfraction aux deux faces de ce pris-

me. Essayons de tracer les progrès des variations que subit cette largeur à mesure que l'inclinaison sur la première surface devient de plus en plus grande, à partir du point où le rayon ne fait qu'effleurer la surface dans le sens du sommet vers l'angle réfringent. Dans ce cas,

$$\alpha = 90^\circ, \ \sin \rho = \frac{1}{\mu}:$$

ce qui donne à ρ et par conséquent à $I + \rho$ ou α, et par suite à ρ', des valeurs maximum d'une grandeur finie. Ainsi $\cos \rho \cdot \cos \rho'$ prend une valeur finie minimum : $\delta \rho'$ ou la largeur du spectre est donc également une quantité finie; mais c'est la plus grande possible. Quand l'inclinaison augmente, ρ et par conséquent α' et ρ' diminuent, et le dénominateur de $\delta \rho'$ devient plus grand; de manière que la largeur du spectre diminue, et atteint son minimum quand $\cos \rho \cdot \cos \rho'$ atteint son maximum, c'est-à-dire quand

$$d\rho \cdot \text{tang } \rho + d\rho' \cdot \text{tang } \rho' = 0.$$

Or cette équation donne pour déterminer la valeur de ρ, et par conséquent celle de α, ou l'incidence quand le spectre est le plus étroit possible,

$$\mu^2 \cdot \sin(I + \rho) \cdot \cos(I + 2\rho) + \sin \rho = 0. \quad (h)$$

Nous voyons par là que la position qui donne la dispersion la plus faible n'est pas du tout celle qui donne la moindre déviation. La première est donnée par l'équation précédente, qui se résout aisément à l'aide d'une table de logarithmes, et qui montre en même temps que ρ doit surpasser $45^\circ - \frac{I}{2}$.

Après avoir atteint la position que nous venons d'assigner, la largeur du spectre croît de nouveau jusqu'à ce que les rayons ne puissent plus traverser le prisme. A cette limite, le rayon émergent ne faisant plus qu'effleurer la face postérieure dans le sens de l'arète vers le sommet, $\rho' = 90^\circ$, $\cos \rho' = 0$.

La dispersion devient alors infinie. Toutes ces variations se remarquent aisément en faisant tourner un prisme autour de son arète, entre l'œil et une chandelle, on, mieux, entre l'œil et une fente étroite dans le volet d'une fenêtre.

450. — Ainsi, quand l'incidence du rayon varie depuis SE (fig. 105) jusqu'à S'E, et par conséquent la direction du rayon réfracté depuis FG jusqu'à F'G', la largeur du spectre commence par avoir une valeur maximum, mais finie; elle décroît ensuite et atteint son minimum, puis recommence à croître jusqu'à l'infini.

La distribution des couleurs ou la largeur de chaque espace coloré pour une position quelconque variera d'ailleurs avec les valeurs de ρ, de ρ' et de sin I : en effet, l'équation (e), en donnant successivement pour $\delta\mu$ les valeurs qui correspondent aux intervalles entre le rouge et l'orangé, l'orangé et le jaune, le jaune et le vert, etc., fournira également les valeurs correspondantes de $\delta\rho'$ ou les largeurs apparentes de ces espaces. Or le dénominateur $\cos\rho\cos\rho'$ est une fonction implicite de μ, et varie par conséquent suivant que l'on prend le rayon initial dans telle ou telle partie du spectre.

Cette variation est très faible quand les angles ρ et ρ' sont considérables ; mais près de la limite, quand le rayon peut à peine être transmis, elle devient très grande : le spectre est fortement contourné, et le violet s'allonge extrêmement par rapport au rouge. L'effet est le même que si la nature du milieu venait à changer pour prendre un rang inférieur dans l'ordre des substances classées dans le tableau de l'art. 443.

451. — L'on voit, par ce qui précède, qu'il est toujours possible d'achromatiser un prisme, quelque ouvert que soit son angle réfringent, en employant un autre prisme de même matière, dont l'angle peut être aussi petit que l'on voudra, car la dispersion peut être accrue indéfiniment en présentant le prisme sous un angle convenable au rayon inci-

dent ; ainsi le second prisme peut non seulement compenser la dispersion du premier, mais encore la surpasser. Dans la fig. 106, malgré la petitesse de l'angle réfringent, la situation inclinée du prisme a lui fait disperser les rayons en sens contraire avec la même puissance que le prisme A y dont l'angle est beaucoup plus grand.

452. — Quand les angles des prismes diffèrent considérablement, le second doit être très incliné, de manière qu'il se trouve près de la limite de la transmission. Dans ce cas, sa dispersion sera fort altérée, et totalement différente de celle de l'autre prisme (art. 450). L'on ne pourra donc obtenir ainsi un achromatisme parfait.

Lorsque le rouge extrême et le violet seront réunis, le vert sera réfracté trop faiblement par le second prisme, et l'on apercevra un spectre pourpre et vert, comme dans le cas de prismes de différents milieux. C'est à ce spectre que le docteur Brewster (qui l'a fait remarquer le premier) a donné le nom de *spectre tertiaire ;* mais il nous semble qu'il vaudrait mieux réserver cette dénomination aux spectres mentionnés à l'art. 446, et nommer ceux-ci *spectres subordonnés.*

Si l'on regarde un petit objet rectangulaire à travers deux prismes tels que l'un, A, se trouve dans son lieu de moindre déviation, et que l'autre, a, dont l'angle est moindre que celui de A, sert à rendre le système achromatique, sans produire cependant un spectre secondaire, cet objet paraîtra contourné. En effet, les côtés parallèles aux arêtes des prismes n'éprouveront aucun changement dans leur longueur apparente, tandis que la largeur du rectangle semblera amplifiée.

Le premier prisme, en vertu de sa position, n'altère point les dimensions angulaires de l'objet qu'on voit au travers ; mais le second en change la largeur dans le rapport de $d\rho''$ à $d\alpha''$, ou (en différentiant) dans le rapport de $\frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha'}{\cos \rho \cdot \cos \rho'}$ à l'unité, rapport qui croît avec d'autant plus de rapidité

que le prisme s'incline davantage, et que ρ' est plus près de gor.

455. — M. Amici a profité de ces propriétés pour construire une espèce de télescope achromatique qui paraît fort bizarre au premier coup-d'œil, n'étant composé que de quatre prismes à faces planes et de même verre. Pour se rendre compte de cet instrument, qu'on imagine un petit objet carré op, dont le côté o est parallèle aux arètes de deux prismes arrangés en conséquence, et perpendiculaire à leurs sections principales, c'est-à-dire au plan du papier : alors, pour un œil placé en E, l'objet réfracté par les deux prismes conservera sa longueur o, mais sa largeur augmentera. Maintenant, si l'on ajoute un nouveau couple de prismes semblable au premier, et disposé de manière à former un système achromatique, mais tel que sa section principale soit perpendiculaire à celle des premiers prismes, et produise une réfraction perpendiculaire au plan du papier ou parallèle à la longueur du carré, celui-ci éprouvera une nouvelle déformation dans le sens de sa longueur, et demeurera incolore. Ainsi, par la première distorsion, le carré croît en largeur dans le même rapport qu'il croît en longueur par la seconde : il doit donc en résulter une image régulière, incolore et amplifiée.

L'auteur de cet ouvrage peut certifier lui-même la bonté de cet instrument, qu'il a vu grossir jusqu'à quatre fois le diamètre des objets entre les mains de son inventeur, à Modène, en 1826. Il est clair qu'en superposant ainsi plusieurs télescopes, on peut augmenter le grossissement en progression géométrique; il est évident aussi qu'en faisant usage de prismes de deux différents milieux pour former les combinaisons binaires, les spectres subordonnés peuvent détruire les spectres *secondaires* qui proviennent de l'inégale dispersion des deux milieux : l'on peut obtenir ainsi un achromatisme d'une perfection presque mathématique. Il serait intéressant d'examiner si ces télescopes ne pourraient pas être

d'une grande utilité pour observer des objets très éclatants, tels que le soleil, par exemple; ils auraient l'avantage de ne pas exiger de verres noircis, les prismes pouvant en tenir lieu; et, comme les rayons ne doivent pas y être réunis en un même foyer, la figure des surfaces ne doit pas être non plus d'une précision excessivement rigoureuse; en un mot, ils seraient exempts de tous les inconvénients qui s'opposent au perfectionnement des télescopes ordinaires, quand on veut les employer à ce genre d'observations.

Problème.

454. — Trouver les conditions d'achromatisme quand plusieurs prismes de différente matière réfractent un rayon de lumière blanche, en supposant que tous les angles réfringents soient très petits, et que le rayon soit presque perpendiculaire à la direction principale de chaque prisme.

Les angles réfringents étant A, A', A'', etc., et les indices de réfraction μ, μ', etc., les déviations partielles seront

$$D = (\mu - 1) A, \quad D' = (\mu' - 1) A', \text{ etc.},$$

et leur somme ou la déviation totale égalera

$$(\mu - 1) A + (\mu' - 1) A' + (\mu'' - 1) A'' + \text{etc.}$$

Pour que le rayon émergent soit incolore, cette déviation doit être la même pour toutes les couleurs, et la quantité dont elle varie quand μ et μ' varient aussi doit s'évanouir, c'est-à dire que

$$A\,\delta\mu + A'\,\delta\mu' + A''\,\delta\mu'' + \text{etc.} = 0.$$

En vertu de l'équation (*d*) de l'art. 439, nous avons $\delta\mu$ (ou, d'après la notation suivie dans cet article, $\mu - \mu_0$)

$$= (\mu_0 - 1)\left[a \cdot \frac{\delta x}{x_0 - 1} + b \cdot \left(\frac{\delta x}{x_0 - 1}\right)^2 + \text{etc.}\right];$$

ce qui donne la forme suivante à l'équation qui précède, quand on l'ordonne suivant les puissances de δx:

$$q = [A(\mu_0 - 1)a + A'(\mu'_0 - 1)a' + A''(\mu''_0 - 1)a'' + \text{etc.}] \cdot \frac{\delta x}{x_0 - 1},$$

$$+ [A(\mu_0 - 1)b + A'(\mu'_0 - 1)b' + A''(\mu''_0 - 1)b'' + \text{etc.}] \left(\frac{\delta x}{x_0 - 1}\right)^2,$$

$$+ \text{etc.},$$

en représentant par a', b', etc., les pouvoirs dispersifs des différents ordres pour le second prisme; par a'', b'', etc., pour le troisième, et ainsi de suite. Ainsi, pour que ce polynome puisse s'anéantir pour tous les rayons du spectre, il faut avoir (en mettant, pour abréger, μ au lieu de μ_0, μ' au lieu de μ'_0, etc.)

$$\left.\begin{array}{l} (\mu - 1) \cdot A\,a + (\mu' - 1) \cdot A'a' + (\mu'' - 1) A''a'' + \text{etc.} = 0 \\ (\mu - 1) \cdot A\,b + (\mu' - 1) \cdot A'b' + (\mu'' - 1) A''b'' + \text{etc.} = 0 \\ (\mu - 1) A\,c + (\mu' - 1) A'c' + (\mu'' - 1) A''c'' + \text{etc.} = 0 \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} (i)$$

En général, le nombre de ces équations étant infini, on ne peut y satisfaire avec un nombre déterminé de prismes. Mais si l'on ne veut réunir qu'autant de couleurs qu'il y a de prismes, ce qui est l'achromatisme le plus exact que l'on puisse atteindre, nous aurons autant d'équations, moins une, que d'inconnues, et nous connaîtrons les rapports des angles entre eux. Ainsi deux milieux suffisent pour unir deux espèces de rayons. Si l'on n'a égard qu'aux dispersions du premier ordre, il viendra

$$(\mu - 1) A\,a + (\mu' - 1) A'a' = 0, \quad \frac{A'}{A} = -\frac{\mu - 1}{\mu' - 1} \cdot \frac{a}{a'}. \qquad (j)$$

Pour unir trois couleurs, l'on aura

$$\begin{array}{l} (\mu - 1) A\,a + (\mu' - 1) A'a' + (\mu'' - 1) A''a'' = 0, \\ (\mu - 1) A\,b + (\mu' - 1) A'b' + (\mu'' - 1) A''b'' = 0; \end{array}$$

d'où l'on tire, en éliminant,

$$\frac{A'}{A} = -\frac{\mu-1}{\mu'-1} \cdot \frac{a b'' - b a''}{a' b'' - b' a''}, \quad \frac{A''}{A} = -\frac{\mu-1}{\mu''-1} \cdot \frac{a b' - b a'}{a'' b' - b'' a'}, \quad (k)$$

et ainsi de suite.

Dans le cas de deux milieux, si l'on ne connaît aucune des quantités b, c, etc., les pouvoirs dispersifs du premier ordre a, a', se déterminent, non par la réunion du rouge et du violet, qui sont trop peu lumineux pour que leur compensation soit de quelque importance, mais par celle des rayons qui éclairent avec le plus de vivacité, et dont en même temps la différence de couleur est la plus forte, tels que les rayons D et F : en unissant ces derniers, on opérera la compensation des autres d'une manière beaucoup plus approchée que si l'on n'avait eu en vue que la réunion des extrémités du spectre, et l'on obtiendra une lumière bien plus concentrée. C'est un principe auquel il importe d'avoir égard chaque fois que l'on essaie des verres dont on veut faire usage pour les télescopes.

Si nous voulions produire l'achromatisme le plus parfait que l'on puisse obtenir avec trois prismes, ce seraient les rayons C, E et G, qu'il faudrait choisir pour déterminer les valeurs de a, b, a', b'; ou, ce qui vaudrait peut-être mieux, C, F et un rayon entre D et E. Mais l'absence d'une ligne bien marquée dans cette partie du spectre rendrait cette dernière combinaison assez difficile à obtenir avec de la lumière solaire, et nous serions obligés d'avoir recours à d'autres méthodes d'appréciation pour suppléer aux raies noires.

455. — Dans le cas de trois milieux, si les numérateurs et les dénominateurs des expressions (k) s'évanouissent ou se réduisent à des quantités très petites, les solutions deviennent illusoires ou du moins inapplicables dans la pratique. Ceci arrive toutes les fois que les fractions $\frac{a}{a'}$, $\frac{a}{a''}$, $\frac{a'}{a''}$, deviennent égales à l'une des fractions correspondantes $\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b''}$ ou $\frac{b'}{b''}$.

Ainsi, pour que les combinaisons soient praticables, il faut employer des milieux dont les pouvoirs dispersifs diffèrent le plus possible, c'est-à-dire pour lesquels les espaces colorés sont très loin d'être proportionnels, comme le flint-glass, le crown-glass et l'acide muriatique, par exemple; ou, mieux encore, l'huile de casse, le crown-glass et l'acide sulfurique.

§ II. — *De la lunette achromatique.*

Aberration chromatique. — Cercle de moindre aberration chromatique. — Usage des longues lunettes. — Principe de la lunette achromatique. — Equations générales de l'achromatisme. — Autre manière d'y parvenir. — Objectifs de deux milieux; objectifs de trois milieux. — Destruction simultanée des deux aberrations. — Détermination des pouvoirs de plusieurs lentilles. — Développement de l'équation générale. — La destruction de l'aberration de sphéricité est un problème indéterminé. — Conditions proposées par Clairaut et par d'Alembert pour le limiter. — Autre condition. — Dimensions d'un objectif aplanétique. — Table pour trouver les dimensions d'un objectif aplanétique. — Exemple de l'usage de cette table. — Objectifs de trois milieux. — Objectif du docteur Blair. — Propriété remarquable de l'acide muriatique. — Le docteur Blair découvre des milieux dont l'échelle de dispersion est la même que celle du verre; il s'en sert pour construire des objectifs doubles. — Les rayons se réfractent, sans se colorer, à la surface commune de deux milieux.

456. — Dans les télescopes de réfraction décrits à l'art. 380, etc., l'inégale réfrangibilité des divers rayons colorés s'oppose à l'extension du pouvoir de ces instruments au-delà de certaines limites très resserrées. Le foyer d'une lentille étant d'autant plus court que l'indice de réfraction est plus grand, il s'ensuit qu'une même lentille réfracte les rayons violets en un foyer plus rapproché de sa surface que celui des rayons rouges : c'est ce que l'on remarque aisément en exposant une lentille aux rayons du soleil, et en recevant le cône des rayons convergents sur un papier placé à des di-

stances de plus en plus grandes. A une distance de la lentille moindre que celle du *foyer des rayons moyens*, le cercle sur le papier sera bordé de rouge; mais, au-delà de ce point, le bord sera bleu, car le cône de rayons rouges qui a pour base la lentille enveloppe celui des rayons violets *en-deçà* de ce foyer, puisque son sommet le dépasse; tandis qu'au contraire le cône des rayons violets entoure celui des rayons rouges au-delà de ce même foyer. Ainsi, quand on tiendra le papier au foyer des rayons moyens ou entre les sommets des cônes rouge et violet, il en résultera une image distincte; mais les rayons extrêmes et les autres rayons intermédiaires se répandront sur des cercles d'une grandeur sensible, dont les bords seront colorés, et l'on n'obtiendra que des images troubles et confuses. La déviation de chaque rayon coloré par rapport à un foyer déterminé s'appelle l'*aberration chromatique*.

457. — L'on trouve aisément le diamètre du plus petit cercle dans lequel tous les rayons colorés sont concentrés par une lentille exempte d'aberration de sphéricité. Ainsi, dans la figure 107, v étant le foyer du violet et r celui du rouge, mno sera le diamètre de ce cercle. Or, à cause des triangles semblables,

$$no = \mathrm{AB} \cdot \frac{mv}{\mathrm{C}v} \text{ et } no = \mathrm{AB} \cdot \frac{mr}{\mathrm{C}r}.$$

En égalant ces valeurs de no, l'on a

$$\frac{mv}{\mathrm{C}v} = \frac{mr}{\mathrm{C}r},$$

et

$$mv = mr \cdot \frac{\mathrm{C}v}{\mathrm{C}r}, \quad mv + mr = mr \cdot \frac{\mathrm{C}r + \mathrm{C}v}{\mathrm{C}r} = rv;$$

par conséquent

$$mr = rv \cdot \frac{\mathrm{C}r}{\mathrm{C}r + \mathrm{C}v} = rv \cdot \frac{\mathrm{C}r}{2\,\mathrm{C}r - rv} = \frac{rv}{2}.$$

à très peu de chose près, puisque la dispersion est petite par rapport à la réfraction totale. Donc

$$no = \frac{AB}{2} \cdot \frac{rv}{Cv}.$$

Or, f étant la valeur inverse de la distance focale,

$$f = L + D = (\mu - 1)(R' - R'') + D,$$

et nous avons

$$rv = -\delta\frac{1}{f} = \frac{\delta f}{f^2} = \frac{\delta\mu\,(R' - R'')}{f^2} = \frac{\delta\mu}{\mu - 1} \cdot \frac{L}{f^2} \text{ et } Cr = \frac{1}{f},$$

en supposant que μ représente l'indice de réfraction pour les rayons rouges extrêmes. L'on conclut de là :

Le diamètre du cercle de moindre aberration chromatique

$= \text{la demi-ouverture} \times \frac{L}{f} \cdot \frac{\delta\mu}{\mu - 1},$

$= \text{la demi-ouverture} \times \text{l'indice de dispersion} \times \frac{L}{f};$

et pour des rayons parallèles, quand $L = f$, ce diamètre égale simplement le produit de la demi-ouverture par l'indice de dispersion.

458. — *Corollaire.* Ainsi le cercle de moindre aberration chromatique conserve la même grandeur, quelle que soit la longueur focale de la lentille, pourvu que l'ouverture reste la même. Comme, dans une lunette, le pouvoir amplifiant, ou la grandeur absolue de l'image vue au moyen d'un oculaire donné, croît en raison de la longueur focale de l'objectif (382), en augmentant cette longueur sans agrandir l'ouverture, la largeur du bord coloré qui entoure l'image est d'autant moindre que l'image est plus grande en proportion : la vision devient donc moins confuse et la lunette grossit davantage.

A cause de cette propriété, avant l'invention des lunettes achromatiques, les astronomes faisaient usage de télescopes de réfraction d'une immense longueur, de cent et de cent cinquante pieds, par exemple. Huygens, en particulier, s'est distingué par la grandeur et l'excellence de ses lunettes, et par les découvertes importantes qu'elles lui ont fait faire dans l'astronomie.

459. — L'objectif achromatique a rendu les lunettes beaucoup plus commodes et plus utiles, en permettant de les réduire à des dimensions raisonnables. Pour en concevoir le principe, il suffit de se rappeler ce que nous avons dit aux art. 451-454, touchant les prismes achromatiques. Une lentille n'est autre chose qu'un système de prismes infiniment étroits, disposés en zones circulaires autour du centre, et dont les angles réfringents croissent avec la distance au centre, de manière à réfracter tous les rayons en un même point. Si l'on parvient donc à achromatiser chaque prisme élémentaire, tout le système sera achromatique. Les équations (i) peuvent s'appliquer aux lentilles considérées sous ce point de vue : car, en nommant R', R'', les courbures des deux surfaces de la première lentille, L' son pouvoir et μ' son indice de réfraction, $R' - R''$, différence des courbures, exprimera l'angle entre les tangentes aux surfaces, ou l'angle réfringent du prisme élémentaire pour une ouverture donnée ou une certaine distance du centre; c'est-à-dire que

$$R' - R'' = A'.$$

On aurait pareillement pour d'autres lentilles

$$A'' = R''' - R^{\text{IV}},$$

et ainsi de suite, ce qui donne à chacune des équations (i) la forme

$$(\mu' - 1)(R' - R'')\,a' + (\mu' - 1)(R''' - R^{\text{IV}})\,a'' + \text{etc.} = 0,$$

ou, plus simplement,

$$\left.\begin{array}{l} L'a' + L''a'' + L'''a''' + \text{etc.} = 0, \\ L'b' + L''b'' + L'''b''' + \text{etc.} = 0, \\ L'c' + L''c'' + L'''c''' + \text{etc.} = 0, \\ \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (a)$$

460. — Ces équations fournissent toutes les conditions nécessaires à l'achromatisme. Comme elles sont indépendantes de D, elles montrent qu'un objectif achromatique garde cette qualité à une distance quelconque de l'objet. Il est évident que le même système d'équations peut se déduire directement de la formule de l'art. 265, qui donne le pouvoir d'un système de lentilles dont les pouvoirs individuels sont L', L'', etc. En effet, la condition de l'achromatisme est

$$\delta L = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta L' + \delta L'' + \delta L''' + \text{etc.}$$

Puisque

$$L' = (\mu' - 1)(R' - R'') \text{ etc.},$$

d'après le système de notation suivi dans cet article,

$$\delta L' = (R' - R'')\,\delta\mu' = L' \cdot \frac{\delta\mu'}{\mu' - 1}.$$

Mais si nous portons successivement, dans l'équation (*d*), au lieu de μ_0, les valeurs de μ', μ'', etc.; au lieu de $\mu - \mu_0$, $\delta\mu'$, $\delta\mu''$, etc., et au lieu de a, b, etc., les systèmes de coefficients a', b', etc., a'', b'', etc., en posant

$$\frac{x - x_0}{x_0 - 1} = p,$$

nous aurons

$$\frac{\delta\mu}{\mu'-1} = a'p + b'p^2 + \text{etc.}, \quad \frac{\delta\mu''}{\mu''-1} = a''p + b''p^2 + \text{etc.},$$

et par conséquent

$$0 = L'(a'p + b'p^2 + \text{etc.}) + L''(a''p + b''p^2 + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

En faisant évanouir tous les termes indépendamment de p, l'on retrouve le système d'équations (a).

461. — Comme il est impossible de satisfaire à la fois à toutes ces équations avec un nombre fini de lentilles, nous devons nous borner aux plus importantes.

Ainsi, avec deux lentilles, l'une de flint et l'autre de crown-glass, par exemple, l'on ne peut satisfaire qu'à une seule équation : l'on choisira naturellement la première, c'est-à-dire

$$L'a' + L''a'' = 0, \text{ ou } \frac{L''}{L'} = -\frac{a'}{a''}. \quad . \quad . \quad (b)$$

Ce qui montre que les pouvoirs des lentilles doivent être opposés, et en raison inverse des pouvoirs dispersifs, ou directe des longueurs focales. Dans une combinaison semblable, les valeurs des pouvoirs dispersifs a' et a'' ne doivent pas être déduites de la réfraction du rouge et du violet extrêmes, mais plutôt, d'après la remarque de l'art. 453, de celle des rayons les plus éclatants, dont les couleurs contrastent le plus : tels sont, par exemple, les rayons C et F dans l'échelle de Fraunhofer.

462. — Avec trois lentilles de différents milieux, on peut satisfaire à trois équations à la fois, et le spectre secondaire étant corrigé, il vient

$$\left.\begin{array}{l} 0 = L' a' + L'' a'' + L''' a''', \\ 0 = L' b' + L'' b'' + L''' b'''. \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \frac{L''}{L'} = -\frac{a' b''' - b' a'''}{a'' b''' - b'' a'''}, \\ \frac{L'''}{L'} = -\frac{a' b'' - b' a''}{a''' b'' - b''' a''}. \end{array}\right\} (c)$$

Pour déterminer les valeurs de a', b', etc., il faut prendre pour couleur moyenne le jaune le plus vif, et pour couleurs extrêmes les rayons du plus beau rouge et du plus beau bleu. Les rayons B, E, H, sont peut-être inférieurs à C, E, G, pour cet objet.

463. — Ainsi, dans un objectif double ayant un foyer positif, la lentille la moins dispersive doit être convexe ou positive, et l'autre négative ou concave. L'ordre dans lequel elles sont placées n'influe aucunement sur leur achromatisme.

464. — Avec une seule lentille on ne peut prévenir ni l'aberration chromatique ni l'aberration de sphéricité (art. 296 et 457); mais, si l'on assemble deux ou un plus grand nombre de lentilles de matière différente, les équations (s), (t), (u), (v), des art. 309, 310, 312 et 313, combinées avec les équations (a) de l'art. 459, nous fournissent les moyens de détruire à la fois les deux aberrations, en ayant soin de ne prendre parmi les équations (a) que celles qui sont compatibles avec les premières. Il est à remarquer que, par un bonheur singulier, les relations d'où dépend l'achromatisme facilitent la résolution du problème au lieu de le compliquer, comme on le croirait au premier coup-d'œil, et qu'elles sont précisément telles que l'analyste les choisirait pour fixer la valeur des quantités indéterminées, et donner à ses équations finales la plus grande simplicité possible. En effet, dans l'équation générale qui sert à corriger l'aberration de sphéricité,

$$\backslash f = 0,$$

ou

$$o = \frac{L'}{\mu'}(\alpha' - \beta' D' + \gamma' D'^2) + \frac{L''}{\mu''}(\alpha'' + \beta'' + \gamma'' D''^2) + \text{etc.} \quad (d)$$

Les polynomes entre parenthèses sont tous du second degré quand on les exprime en fonction des courbures des surfaces et de $D' = D$, proximité du point rayonnant par rapport à la première lentille. Comme L', L'', etc., sont des fonctions du premier degré de ces mêmes courbures, l'équation entière s'élève au troisième degré. Mais les conditions de l'achromatisme donnant entre L' et L'' des relations indépendantes de R', R'', etc., nous pouvons éliminer ces quantités, et les remplacer par a', a'', b', b'', etc., de manière que l'équation précédente se trouve ramenée au second degré, et devient par conséquent d'une solution plus facile.

465. — Passons maintenant au développement de l'équation (d), dans laquelle on peut regarder L' et L'' comme des quantités connues quand on y introduit les conditions de l'achromatisme ; car, en prenant

$$L = L' + L'' + \text{etc.} = \text{le pouvoir de la lentille composée}$$

(pouvoir que nous pouvons supposer connu ou même égal à l'unité), cette équation, combinée avec (a), détermine les valeurs de L', etc.

Ainsi, dans le cas de deux lentilles, en nommant π le rapport des pouvoirs dispersifs ou $\frac{a'}{a''}$, nous avons

$$L' = \frac{L}{1 - \pi}, \quad L'' = -\frac{\pi L}{1 - \pi},$$

et ainsi de suite pour un nombre quelconque de lentilles. Représentons respectivement par r', r'', r''', etc., les courbures de la première, seconde, troisième, etc., lentille, en commençant par celle qui reçoit la première les rayons incidents : il vient alors

$$L' = (\mu' - 1)(R' - R'') = (\mu'' - 1)(r' - R'');$$

de manière que

$$R^{ii} = r^{i} - \frac{L'}{\mu' - 1},$$

et pareillement

$$R^{iv} = r^{ii} - \frac{L''}{\mu'' - 1}, \text{ etc.}$$

Nous devons donc écrire ces valeurs au lieu de R'' et de R^{iv} dans les formules précédentes, en observant que l'on a d'ailleurs

$$R^{i} = r^{i},$$

$$R''' = r''.$$

En les substituant dans les valeurs de α, β, etc. (art. 293), il vient

$$\alpha' = (2 + \mu')r'^2 - (2\mu' + 1)\frac{\mu'}{\mu' - 1}L'r' + \mu'\left(\frac{\mu'}{\mu' - 1}\right)^2 L'^2,$$

$$\beta' = (4 + 4r')r' - (3\mu' + 1)\frac{\mu'}{\mu' - 1}L',$$

$$\gamma' = 2 + 3\mu';$$

et l'on trouve des équations analogues pour α'', β'', γ'', etc. : de manière qu'en substituant de nouveau ces expressions, et en écrivant au lieu de D'' sa valeur $L' + D'$, et $L' + L'' + D'$ au lieu de D''', et ainsi de suite, l'équation générale

$$\Delta f = 0$$

devient

$$
\begin{aligned}
o = & \left[\left(\frac{2}{\mu'}+1\right)L'r'^2+\left(\frac{2}{\mu''}+1\right)L''r''^2+\left(\frac{2}{\mu'''}+1\right)L'''r'''^2+\text{etc.}\right] \\
& -\left[\frac{2\mu'+1}{\mu'-1}L'^2r'+\frac{2\mu''+1}{\mu''-1}L''^2r''+\frac{2\mu'''+1}{\mu'''-1}L'''^2r'''+\text{etc.}\right] \\
& -4\left[\left(1+\frac{1}{\mu''}\right)L'L''r''+\left(1+\frac{1}{\mu'''}\right)(L'+L'')L'''r'''+\text{etc.}\right] \\
& +\left[\left(\frac{\mu'}{\mu'-1}\right)^2L'^3+\left(\frac{\mu''}{\mu''-1}\right)^2L''^3+\left(\frac{\mu'''}{\mu'''-1}\right)^2L'''^3+\text{etc.}\right] \\
& +\left[\frac{3\mu''+1}{\mu''-1}L'L''^2+\frac{3\mu'''+1}{\mu'''-1}(L'+L'')L'''^2+\text{etc.}\right] \\
& +\left[\left(\frac{2}{\mu''}+3\right)L'^2L''+\left(\frac{2}{\mu'''}+3\right)(L'+L'')^2L'''+\text{etc.}\right] \\
& +D'\left\{\begin{aligned}
& -4\left[\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)L'r'+\left(1+\frac{1}{\mu''}\right)L''r''+\left(1+\frac{1}{\mu'''}\right)L'''r'''+\text{etc.}\right] \\
& +\left[\frac{3\mu'+1}{\mu'-1}L'^2+\frac{3\mu''+1}{\mu''-1}L''^2+\frac{3\mu'''+1}{\mu'''-1}L'''^2+\text{etc.}\right] \\
& +2\left[\left(\frac{2}{\mu''}+3\right)L'L''+\left(\frac{2}{\mu'''}+3\right)(L'+L'')L'''+\text{etc.}\right]
\end{aligned}\right\} \\
& +D'^2\left[\left(\frac{2}{\mu'}+3\right)L'+\left(\frac{2}{\mu''}+3\right)L''+\left(\frac{2}{\mu'''}+3\right)L'''+\text{etc.}\right]
\end{aligned}
$$

466. — Pour abréger, désignons par X les termes de ce polynome indépendants de D', par Y l'ensemble des termes multipliés par D', et par Z celui des termes multipliés par D'^2 : nous avons alors

$$\Delta f = \frac{y^2}{2}(X + Y . D' + Z . D'^2);$$

et quand Δf s'évanouit, l'aberration se trouve détruite. En n'ayant égard qu'aux rayons parallèles, c'est-à-dire en supposant

$$D' = o,$$

cette équation se réduit à

$$X = 0;$$

lorsque cette dernière sera satisfaite, la lunette pourra servir à observer les astres, ou des objets assez éloignés pour que D′ puisse être négligé sans erreur sensible.

467. — L'équation

$$X = 0$$

est du second degré par rapport à chacune des quantités r', r'', etc., dont le nombre est le même que celui des lentilles : par conséquent cette condition seule ne suffit pas pour fixer leurs valeurs; si l'on n'y joint d'autres relations entre ces inconnues, le problème reste indéterminé, et l'aberration peut être corrigée d'une infinité de manières. Si l'on ne considère d'abord que deux lentilles, l'équation

$$X = 0$$

ne renfermant que deux inconnues, on n'a plus besoin que d'une équation que l'on choisira de manière à obtenir les résultats les plus avantageux pour la pratique. Clairaut a proposé de travailler deux lentilles de manière à mettre leurs surfaces adjacentes en contact dans toute leur étendue, afin qu'en les cimentant ensemble, il n'y eût pas de perte de lumière par les réflexions qu'elles produiraient. Ce serait là certainement un très grand avantage si l'on pouvait joindre ainsi deux verres d'une certaine grandeur, sans que le ciment les fît travailler en se refroidissant, ou si l'on parvenait à les assujettir d'une autre manière. Mais, sans parler de l'inégale dilatation causée par la chaleur, la moindre variation de température changerait nécessairement leur figure, lors même qu'on serait parvenu à les faire tenir de force. C'est ainsi qu'on voit une lame composée de deux métaux d'inégale dilatabilité se cour-

ber plus ou moins suivant le degré de chaleur auquel elle est exposée. La condition dont il s'agit s'exprime algébriquement par

$$L' = (\mu' - 1)(r' - r'') :$$

car, dans ce cas,

$$R' = r' \text{ et } R'' = R''' = r'' ;$$

et, comme cette équation n'est que du premier degré en r', r'', elle donne lieu à une équation du second degré, en éliminant entre elle et

$$X = o,$$

qui n'est autre, dans le cas actuel, que l'équation (v) de l'art. 312, dans laquelle on aurait écrit r' au lieu de R', et r'' au lien de R'''.

468. — Mais la condition de Clairaut a un autre inconvénient beaucoup plus grave : c'est que l'équation résultante a ses deux racines imaginaires, lorsque les pouvoirs réfringents et dispersifs des verres sont tels qu'il n'est pas rare de les rencontrer dans la pratique; et même, sans sortir des limites entre lesquelles elle a des racines réelles, les courbures que l'on en déduit varient avec tant de rapidité au plus léger changement dans les données, que les calculs en deviennent très épineux et les interpolations difficiles lorsqu'il s'agit de former une table de ces courbures. Dans le tome 3 de ses *Opuscules*, d'Alembert propose une foule d'autres limitations, telles que d'anéantir l'aberration de sphéricité pour les rayons de toute couleur, ce qui revient à supposer à la fois

$$X = o \text{ et } \frac{\delta X}{\delta \mu'} \delta \mu' + \frac{\delta X}{\delta \mu''} \delta \mu'' = o ;$$

ce qui conduit à des équations bicarrées, et n'offre aucun avantage pour la pratique. Mais, sans chercher des perfec-

tionnements si raffinés, l'équation générale

$$X + Y D' + Z D'^2 = 0$$

fournit une condition qui réunit tous les avantages : c'est de supposer

$$Y = 0.$$

Cette hypothèse fait disparaître le terme dépendant de D', sans que D' soit égal à zéro; de manière que la lunette peut servir à l'observation d'objets peu éloignés de l'œil sans cesser d'être aplanétique. A la vérité, le terme

$$D'^2 \left[\left(\frac{2}{\mu'} + 3\right) L' + \left(\frac{2}{\mu''} + 3\right) L'' + \text{etc.} \right]$$

ne peut s'évanouir quand on n'emploie que deux lentilles, étant composé entièrement de fonctions données des pouvoirs réfringents et dispersifs, à moins que D' ne soit nul de lui-même, ou que le facteur en μ', μ'', L', L'', etc., ne soit par hasard égal à z[illegible] Mais, hormis le cas où l'objet n'est qu'à une très p[illegible]ance (comme dix fois la longueur de la lune[illegible] de D' est toujours assez petit pour [illegible]gliger, et regarder l'instrument comme [illegible]planétique lorsque Y = 0. Comme cette [illegible]st que du premier degré en r', r'', elle n'introduit aucune difficulté nouvelle dans le calcul. L'élimination conduit alors à une équation du second degré; et, ce qui est de la plus grande importance, les racines de cette équation sont toutes réelles pour des valeurs de μ', μ'', et du rapport de dispersion ϖ, telles qu'on les rencontre dans la pratique. Les courbures que l'on en déduit n'étant pas trop fortes, on peut les obtenir plus aisément dans la pratique, plus du moins qu'en suivant toute autre méthode proposée jusque aujourd'hui. Elles se prêtent d'ailleurs à l'interpolation avec une facilité particulière, comme nous le verrons bientôt.

469. — Ces raisons nous paraissent décisives en faveur de l'équation

$$Y = 0,$$

qui devient dans le cas actuel, où l'on ne veut avoir qu'un double objectif aplanétique,

$$\left.\begin{aligned} 0 = 4\left(1+\frac{1}{\mu'}\right)L'r' + 4\left(1+\frac{1}{\mu''}\right)L''r'' \\ -\frac{5\mu'+1}{\mu'-1}L'^2 - \left(6+\frac{4}{\mu''}\right)L'L'' - \frac{3\mu''+1}{\mu''-1}L''^2; \end{aligned}\right\}(\mathit{S})$$

à laquelle il faut joindre l'équation (v) de l'art. 412, en changeant R' en r', et R'' en r''.

470. — Pour substituer dans ces équations les nombres aux lettres, l'on doit connaître d'abord μ', μ'' et π. Le moyen le plus prompt et le plus sûr pour un opticien, c'est de faire de petits objectifs avec les échantillons des verres dont il veut se servir, et de les travailler jusqu'à ce que leur combinaison donne une image aussi incolore qu'il est possible de l'obtenir, en ayant recours à l'expérience suivante, qui sert ordinairement à opérer cette vérification. On examine, en l'amplifiant beaucoup, l'image d'un cercle blanc et bien terminé, ou un anneau circulaire sur un fond noir : si ses bords sont parfaitement incolores, la combinaison des verres est excellente ; mais ceci arrive rarement à cause des spectres secondaires, et il reste le plus souvent deux légères franges, l'une d'un vert pâle à la circonférence intérieure de l'anneau, et l'autre, de couleur pourpre, à l'extérieur, quand la lunette n'est pas à son foyer, c'est-à-dire quand l'objectif est trop rapproché de l'oculaire, ou *vice versa*. En effet, tandis que la plus grande partie des rayons bleus et orangés sont réunis au foyer, le rouge et le violet convergent vers un point plus éloigné, et le vert, au contraire, a son foyer plus près de l'objectif. La réfraction des rayons verts est due princi-

palement au crown-glass, c'est-à-dire à la lentille convexe, et celle du rouge et du violet (dont le mélange forme le pourpre) au flint-glass, c'est-à-dire au verre concave. (Voyez la table de l'art. 443.) Les longueurs focales de ces lentilles doivent être alors déterminées avec soin; ce qui fera connaître le rapport des dispersions (π), puisque c'est le même que celui des longueurs focales (454). Quant aux indices de réfraction, il vaut mieux s'en assurer directement en donnant à quelques morceaux de chaque espèce de verre la forme d'un petit prisme. Dès que l'on connaît π, en prenant pour unité le pouvoir de la lentille composée, l'on a

$$L' = \frac{1}{1-\pi} \quad \text{et} \quad L'' = -\frac{\pi}{1-\pi};$$

de manière que L' et L'' sont également connues, et il ne s'agit plus que de substituer leurs valeurs, ainsi que celles de μ' et de μ'' dans les formules mentionnées plus haut.

La table suivante offre, en abrégé, les variations des courbures de chaque lentille subordonnées à celles de chaque indice de réfraction considéré comme variable *séparément;* ce qui permet d'interpoler par parties proportionnelles pour les nombres compris entre les valeurs de μ', μ'' et π, rapportées dans la table. La fig. 108 représente l'objectif qui résulte de cette méthode.

TABLE

TABLE POUR TROUVER LES DIMENSIONS D'UN OBJECTIF APLANÉTIQUE.

Indice de réfraction du crown-glass ou de la lentille convexe $= \mu' = 1.524$.
Indice de réfraction du flint-glass ou de la lentille concave $= \mu'' = 1.585$.
Longueur focale du système $= 10.000$.

	LENTILLE DE CROWN-GLASS.					LENTILLE DE FLINT-GLASS.				
	1re SURFACE, CONVEXE.			2e SURFACE, CONVEXE.		3e SURFACE, CONCAVE.	4e SURFACE, CONVEXE.			
Rapport de dispersion $\pi =$	Rayon correspondant aux indices de réfraction placés en tête du tableau.	Variation du rayon pour un accroissement de +0.01 dans la valeur de l'indice de réfraction du crown-glass.	Variation du rayon pour un accroissement de +0.01 dans la valeur de l'indice de réfraction du flint-glass.	Rayon de courbure.	Longueur focale de la lentille de crown-glass.	Rayon de courbure	Rayon correspondant aux indices de réfraction placés en tête du tableau.	Variation du rayon pour un accroissement de +0.01 dans la valeur de l'indice de réfraction du crown-glass.	Variation du rayon pour un accroissement de +0.01 dans la valeur de l'indice de réfraction du flint-glass.	Longueur focale de la lentille de flint-glass.
0.50	6.7485	+0.0500	−0.0030	4.2827	5.0	4.1575	14.3697	+0.9921	−0.3962	10.0000
0.55	6.7184	+0.0740	−0.0011	3.6332	4.5	3.6006	14.5353	+1.0080	−0.5033	8.1818
0.60	6.7069	+0.0676	+0.0037	3,0488	4.0	3.0640	14.2937	+1.1049	−0.5659	6.6667
0.65	6.7316	+0.0563	+0.0125	2.5208	3.5	2.5566	13.5709	+1.1614	−0.6323	5.3846
0.70	6.8279	+0.0335	+0.0312	2.0422	3.0	2.0831	12.3154	+1.1613	−0.7570	4.2858
0.75	7.0816	−0.0174	+0.0568	1.6073	2.5	1.6450	10.5186	+1.0847	−0.7207	3.3333

471. — Si l'on voulait, dans un cas donné, se servir de cette table pour calculer le rayon d'une des surfaces (de la première ou de la quatrième, par exemple), l'on n'aurait qu'à regarder chaque élément comme variable séparément, et prendre pour chacun des parties proportionnelles.

L'exemple suivant éclaircira ce procédé.

Quelles doivent être les dimensions d'un objectif de 30 pouces de foyer, l'indice de réfraction du crown-glass étant 1.519, et celui du flint-glass 1.589?

Les pouvoirs dispersifs sont dans le rapport de 0.567 à l'unité, c'est-à-dire que 0.567 est le rapport de dispersion; d'où

$$\mu' = 1.519,\ \mu'' = 1.589,\ \pi = 0.567.$$

Le calcul doit s'effectuer d'abord pour une longueur focale composée = 10.000, comme dans la table; voici comment on opérera :

1° Soustraire de 1.000 les décimales (0.567) qui représentent le rapport de dispersion : 10 fois cette différence ou 10×0.433 sera la longueur focale de la lentille de crown-glass.

2° Diviser l'unité par ce même rapport; diminuer le quotient $\left(\frac{1}{0.567}\right)$ de l'unité : le reste (1.7635 — 1.0000 = 0.7635), multiplié par 10 (c'est-à-dire 7.635), sera la longueur focale de la lentille de flint-glass.

Nous devons prendre ensuite dans la table les rayons de la première et de la quatrième surface qui correspondent aux rapports de dispersion les plus voisins de 0.567, c'est-à-dire 0.55 et 0.60.

Or nous avons

Pouvoirs réfringents donnés. . .	1.519	et 1.589
Pouvoirs réfringents de la table. .	1.524	1.585
Différences. .	— 0.005	+ 0.004

La réfraction du crown-glass est donc plus forte et celle du flint-glass plus faible que dans les verres qui ont servi à calculer la table.

Sur la même ligne horizontale que 0.55 l'on trouve, pour une variation de + 0.01 dans chaque pouvoir réfringent, les variations suivantes dans les deux rayons :

	1re surface.	4e surface.
Pour une variation de + 0.01 dans le crown . . .	+ 0.0740	+ 1.0080
Pour une variation de + 0.01 dans le flint	— 0.0011	— 0.5033

Mais la variation dans le crown est. . = — 0.005, au lieu de + 0.01, et dans le flint . . . = + 0.004.

Il nous faut donc prendre des parties proportionnelles des nombres précédents, en changeant le signe pour le crown-glass : il viendra alors

	1re surface.	4e surface.
Pour — 0.005 de variation dans le crown	— 0.0370	— 0.5040
Pour + 0.004 de variation dans le flint	— 0.0004	— 0.2013
Variation totale due aux deux causes	— 0.0374	— 0.7053
Mais les rayons de la table sont.	6.7184	14.5353
Rayons interpolés.	6.6810	13.8300.

En interpolant par la même méthode les mêmes rayons, le rapport de dispersion étant supposé = 0.60, l'on trouvera

	1re surface.	4e surface.
Pour — 0.005 de variation dans le crown	— 0.0338	— 0.5524
Pour + 0.004 de variation dans le flint	+ 0.0015	— 0.2264
Variation totale	— 0.0323	— 0.7788
Rayons de la table	6.7069	14.2937
Rayons interpolés.	6.6746	13.5149

Ayant ainsi déterminé les rayons correspondants aux réfractions données, mais pour des rapports de dispersion = 0.55 et 0.60, il ne reste plus qu'à prendre leurs valeurs proportionnelles pour le rapport intermédiaire 0.567.

		1er rayon.	4e rayon.
Pour	0 600	6.6746	13.5149
Pour	— 0.550	6.6810	13.8300
Différences	+ 0.050	— 0.0064	— 0.3151

0.050 : (0.567 — 0.050 = 0.017) :: — 0.0064 : — 0.0022

0.050 : 0.017) :: — 0.3151 : — 0.1071

De manière que les véritables rayons correspondants aux données sont

6.6810 — 0.0022 = 6.6788

et

13.8300 — 0.1071 = 13.7229.

La longueur focale de la lentille de crown-glass

$$= 4.330 = \frac{1}{L'}.$$

Le rayon de la première surface

$$= 6.6788 = \frac{1}{R'}.$$

L'indice de réfraction

$$= 1.519 = \mu'.$$

La formule

$$L' = (\mu' - 1)(R' - R'')$$

donne pour $\frac{1}{R''}$, rayon de la seconde surface, la valeur

$$- 3.3868.$$

Pour la lentille de flint-glass,

La longueur focale

$$= \frac{1}{L''} = - 7.635.$$

Le rayon de la surface postérieure

$$= \frac{1}{R^{IV}} = - 13.7729.$$

L'indice de réfraction

$$= \mu'' = 1.589.$$

D'où l'on tire

$$\frac{1}{R'''} = - 3.3871$$

pour la valeur du rayon de l'autre surface. Les quatre rayons obtenus de cette manière supposent une longueur focale de

10 pouces : comme celle de la lunette proposée est de 30 pouces, il faut tripler les nombres précédents; ce qui donne

Rayon de la première surface	=	+ 20.0364 pouces.
de la deuxième	=	— 10.1604
de la troisième	=	— 10.1613
de la quatrième	=	— 41.1687

472. — Ainsi les rayons des deux surfaces intérieures de la lentille double (fig. 108) diffèrent à peine d'un millième de pouce : les lentilles pourraient par conséquent être collées ensemble si l'on y trouvait quelque utilité. Cette égalité presque parfaite n'est point l'effet du hasard et ne tient point aux valeurs particulières des données. Si l'on jette un coup-d'œil sur la table, on remarquera que cette égalité approchée des surfaces intérieures (la deuxième et la troisième) se confirme singulièrement, malgré les variations de π. La construction proposée ici pour des verres ordinaires approche donc beaucoup de celle de Clairaut.

473. — Pour vérifier ces résultats par l'expérience, M. South fit exécuter, d'après cette méthode, par M. Tulley, un des plus habiles artistes de la Grande-Bretagne, une lunette achromatique, qui appartient maintenant à M. J. Moore de Lincoln. Sa longueur focale est de 45 pouces, son ouverture de 3 $\frac{1}{4}$. Elle répondit pleinement à l'idée qu'on en avait conçue, et donna un grossissement = 300 et des images parfaitement distinctes. Avec elle on peut séparer plusieurs étoiles doubles, etc. On en trouvera une description plus détaillée dans le *Journal de l'institution royale*, n° 26. Si les opticiens suivaient le bel exemple de Fraunhofer et s'attachaient davantage à la théorie en ce qui concerne les pouvoirs réfringents de leurs verres par rapport aux rayons colorés, la table que nous avons rapportée plus haut deviendrait insuffisante.

474. — Quand on veut construire un objectif avec trois milieux, l'on doit avoir soin de les prendre tels que leur action sur chaque rayon coloré soit très différente.

Le docteur Blair, qui a beaucoup mérité de la science en examinant le premier avec quelque détail les pouvoirs dispersifs considérés comme caractères physiques, a senti d'abord la nécessité de détruire les spectres secondaires et imaginé les moyens de parvenir à ce but.

Si l'on considère les succès extraordinaires qu'il a obtenus et la perfection des lunettes construites d'après sa méthode, il est à regretter qu'il soit le seul, jusqu'à présent, qui se soit occupé sérieusement de cette branche importante de l'optique. Nous ne pensons pas cependant que l'usage de grands objectifs remplis de liquides puisse jamais être avantageux; mais il serait très utile de donner aux verres de moyenne grandeur un degré de perfection de plus et d'augmenter leur grossissement. Les expériences de ce savant sont consignées dans les *Transactions de la société royale d'Édimbourg*, 1791. Nous ne pouvons donner ici qu'un extrait de son travail.

475. — Le docteur Blair observa le premier que deux lentilles doubles achromatiques dont les réfractions sont les mêmes, mais dont les pouvoirs dispersifs sont différents, produisent des franges secondaires d'inégale largeur. Il en conclut qu'en employant deux semblables lentilles, le rayon émergerait sans dévier, à cause de l'égalité des réfractions, et que, les spectres de première espèce étant détruits, il ne resterait plus qu'un spectre secondaire égal à la différence de ceux des deux lentilles. En raisonnant donc absolument de la même manière que pour corriger les spectres primaires (art. 426 et 427), si l'on augmente la réfraction totale de la première lentille double A, qui donne, toutes choses égales d'ailleurs, le *moindre* spectre secondaire, sa couleur secondaire croîtra également jusqu'à ce qu'elle devienne égale à celle de la seconde B. Partant de ce principe, le docteur Blair

forma avec deux fluides *a* et *b* (deux huiles essentielles, telles que la naphte et l'huile de térébenthine, dont les dispersions sont très différentes) une lentille composée A (fig. 109), *convexe* et achromatique, qui réfractait plus fortement les rayons verts que les rouges et les violets réunis. Il construisit ensuite avec du verre et l'huile la plus dispersive *b* une seconde lentille B, *concave* et aussi achromatique, c'est-à-dire exempte de spectres primaires. Dans celle-ci les rayons verts étaient aussi plus réfractés que les rouges et les violets réunis; mais ils l'étaient *à un plus haut degré*, proportionnellement à la déviation totale, que dans la première combinaison A.

Quand il eut donc assemblé ses deux lentilles, comme dans la fig. 109, la réfraction de la lentille convexe l'emporta sur celle de l'autre, mais les spectres secondaires furent détruits entièrement. Le docteur Blair affirme que les expériences les plus rigoureuses ne peuvent faire apercevoir la moindre trace de coloration quand on se sert de pareilles lentilles : il en conclut que la compensation a lieu non seulement pour le vert, le rouge et le violet, mais encore pour toutes les autres couleurs, puisque le bleu et le jaune disparaissent également. On peut supprimer le verre plan qui sépare les lentilles, en les plaçant l'une contre l'autre, comme dans la fig. 110.

476. — C'est en s'occupant de semblables recherches que le docteur Blair reconnut la possibilité de former des combinaisons binaires, de même réfraction totale, dont les spectres secondaires sont de couleurs opposées, c'est-à-dire que l'ordre des couleurs de ces spectres est renversé. En d'autres termes, tandis que, dans certaines combinaisons, les rayons verts sont plus réfractés que les rayons rouges et violets, ils le sont moins dans d'autres.

Il trouva, par exemple, que les rayons verts se trouvent parmi les moins réfrangibles dans les spectres formés par la plupart des milieux très dispersifs contenant des solutions mé-

talliques, tandis qu'on observe le contraire à l'égard d'autres milieux doués d'un pouvoir dispersif assez considérable. L'acide muriatique est du nombre de ces derniers : ainsi, dans les combinaisons du verre avec cet acide, les couleurs des spectres secondaires sont disposées dans un ordre inverse de celui que produisent les combinaisons du verre avec les huiles, ou du crown avec le flint-glass. Si l'on veut former un objectif au moyen de deux combinaisons binaires, en suivant la méthode décrite à l'article précédent, les deux lentilles doivent être convexes ; mais il n'en résulte aucun avantage particulier. Le docteur Blair a considéré cette propriété sous un autre point de vue, en cherchant si, par ce moyen, l'on ne pourrait pas se passer tout-à-fait d'un troisième milieu, et produire une réfraction exempte de toute couleur secondaire en n'employant que deux milieux. Il paraît que l'ordre et la distribution des couleurs du spectre dépendent entièrement de la composition chimique du milieu, aussi-bien que la réfraction totale et le pouvoir dispersif. Ainsi, en faisant varier la proportion des ingrédients d'un milieu, l'on pourrait peut-être, sans altérer notablement la dispersion et la réfraction totale, produire un milieu composé dans lequel les sept couleurs occuperaient des espaces d'une grandeur déterminée par une certaine loi (en ne s'écartant pas trop des limites naturelles).

D'après ce que nous avons déjà vu, si l'on pouvait composer un milieu dont l'échelle de dispersion ou la loi de distribution des couleurs fût la même que celle du crown-glass, tandis que la dispersion absolue serait tout-à-fait différente, on fabriquerait des objectifs *doubles* qui ne laisseraient plus rien à désirer : c'est à quoi l'on parvient en profitant de la propriété de l'acide muriatique, dont nous venons de faire mention.

L'on a remarqué que la présence d'un métal (de l'antimoine, par exemple) dans un fluide donne à celui-ci un très grand pouvoir réfringent et dispersif, et qu'en même temps

augmente de beaucoup la partie du spectre la plus réfrangible, par rapport aux autres couleurs. D'un autre côté, l'acide muriatique produit l'effet contraire. Le docteur Blair en conclut qu'en combinant l'acide muriatique avec des solutions métalliques, dans des proportions à déterminer par l'expérience, on pourrait obtenir un fluide qui jouirait de la propriété désirée : c'est à quoi il parvint effectivement après quelques essais. Les métaux dont il se servit sont l'antimoine et le mercure. Pour y introduire une quantité suffisante d'acide muriatique, il employa l'antimoine à l'état de muriate dissous dans l'eau ; et se servit d'une solution de sel ammoniac, qui est un composé d'ammoniac et d'acide muriatique, pour dissoudre le sublimé corrosif (muriate ou perchlorure de mercure) en plus grande quantité qu'avec l'eau seulement. En ajoutant de l'acide muriatique libre au composé connu sous le nom de *beurre d'antimoine* (chlorure d'antimoine), ou du sel ammoniac à la solution mercurielle, il réussit complétement à former un spectre dont les rayons suivaient exactement la loi de dispersion du crown-glass ; il parvint même à détruire à volonté les spectres secondaires. Il ne lui restait plus qu'à construire un objectif d'après ses principes : tel est celui que représente la fig. 111. Quoiqu'il se fît deux réfractions aux surfaces communes entre le liquide et le verre, l'aberration chromatique était totalement détruite, à ce que nous assure le docteur Blair, et les rayons colorés s'écartaient de leur direction en ligne droite, avec la même régularité que dans la réflexion.

477. — Le docteur Blair a poussé si loin ses intéressantes expériences, qu'il croit pouvoir construire un objectif de neuf pouces de longueur focale et de trois pouces d'ouverture ; ce qu'assurément aucun artiste ne songerait à faire avec des lentilles de verre. Nous terminerons ce que nous avions à dire des travaux de ce physicien en répétant un vœu émis dans une semblable occasion par le docteur Brewster, qui a si dignement dépassé la limite tracée par son prédécesseur

par ses recherches sur les pouvoirs dispersifs. Ce savant désirait que cette partie de l'optique fixât l'attention d'artistes habiles, qui confirmassent les découvertes du docteur Blair par des expériences faites avec tout le soin convenable. Si l'on parvenait à composer des milieux solides doués de propriétés semblables à celles des liquides dont nous venons de parler, le télescope deviendrait un nouvel instrument.

478. — Les expériences du docteur Blair conduisent à cette conclusion remarquable, qu'à la surface commune de deux milieux un rayon blanc peut se réfracter sans dispersion. En effet, μ et μ' étant les indices de réfraction des milieux pour une certaine couleur, telle que le rouge extrême, $\frac{\mu'}{\mu}$ sera leur indice relatif pour cette même couleur, et $\frac{\mu'+\delta\mu'}{\mu+\delta\mu}$ pour une couleur quelconque. Si les pouvoirs réfringents et dispersifs sont tels que

$$\frac{\mu'+\delta\mu'}{\mu+\delta\mu}=\frac{\mu'}{\mu},$$

d'où

$$\mu\,\delta\mu'=\mu'\,\delta\mu \quad\text{et}\quad \frac{\delta\mu}{\delta\mu'}=\frac{\mu}{\mu'},$$

et que cette relation subsiste pour tout le spectre, c'est-à-dire si les accroissements des indices de réfraction, à partir du rouge vers le violet, sont proportionnels aux indices mêmes, l'indice de réfraction relatif sera le même pour toutes les couleurs, et la dispersion n'aura pas lieu. De là résulte entre les indices de réfraction et de dispersion la relation suivante :

$$\frac{p'}{p}=\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\mu-1}{\mu'-1}=\frac{1-\frac{1}{\mu}}{1-\frac{1}{\mu'}}.$$

De plus, l'échelle de dispersion doit être la même pour les deux milieux. Suivant que les dispersions s'écarteront en plus

ou en moins de la loi précédente, les rayons violets seront plus ou moins réfractés que les rouges à la surface commune des deux milieux.

Nous y asserons maintenant à la solution d'un problème d'une grande importance pour la pratique, en ce qu'il permet d'achever la destruction des couleurs dans un objectif déjà à peu près achromatique, en éloignant plus ou moins les lentilles sans altérer ni leurs courbures ni leurs longueurs focales.

Problème.

479. — Exprimer la condition de l'achromatisme quand les deux lentilles se trouvent à une certaine distance t l'une de l'autre.

Reprenant la notation des art. 251 et 268, nous avons

$$f'' = L' + D,$$

$$f^{\mathrm{iv}} = L'' + \frac{f''}{1 - f'' t},$$

$$\delta f'' = \delta L'$$

et

$$\delta f^{\mathrm{iv}} = \delta L'' + \frac{\delta f''}{(1 - f'' t)^2} = \delta L'' + \frac{\delta L'}{[1 - t(L' + D)]^2}.$$

En outre, pour que la combinaison soit achromatique, il faut avoir

$$\delta f^{\mathrm{iv}} = 0;$$

et puisque t et D sont constants, et que L' et L'' ne varient qu'en conséquence des accroissements des indices de réfraction μ' et μ'', l'on a

$$\delta L' = (R' - R'')\, \delta \mu' = \frac{\delta \mu'}{\mu' - 1}\, L' = p' L',$$

et pareillement

$$\delta L'' = p'' L'';$$

de manière qu'en substituant, il vient

$$[1 - t(L' + D)]^2 + \frac{p'}{p''} \cdot \frac{L'}{L''} = 0.$$

480. — Telle est la condition de l'achromatisme. Comme elle dépend de D, l'on voit que, si les lentilles ne se touchent pas, l'objectif ne sera plus achromatique pour des objets rapprochés, lors même que la coloration serait tout-à-fait nulle pour des objets éloignés : l'œil ne peut donc être achromatique pour des objets placés à des distances quelconques, car ses lentilles étant très épaisses par rapport à leurs longueurs focales, les surfaces qui ne sont pas en contact se trouvent séparées par des intervalles considérables.

481. — Dans le cas de rayons parallèles, l'équation devient

$$p'' L'' (1 - t L')^2 = - p' L';$$

d'où l'on peut conclure l'intervalle t entre les lentilles quand on connaît les pouvoirs réfringents et dispersifs. La valeur de t est alors

$$t = \frac{1}{L'}\left(1 - \sqrt{-\frac{p'}{p''} \cdot \frac{L'}{L''}}\right).$$

482. — Si les lentilles se suivaient immédiatement, la condition de l'achromatisme serait

$$-\frac{p'}{p''} \cdot \frac{L'}{L''} = 1,$$

comme nous l'avons déjà fait voir. Chaque fois donc que cette fraction est moindre que l'unité, c'est-à-dire chaque fois que L'', pouvoir de la lentille concave de flint-glass (que nous supposons ici être la seconde), est *trop grand*, ou quand la couleur est *plus que corrigée*, pour nous servir de l'expression des opticiens, l'on peut achromatiser l'objectif ou re-

médier à l'excès de correction, sans retailler les verres, en éloignant un peu les lentilles. Dans ce cas, en effet, la quantité sous le radical est moindre que l'unité, et par conséquent t est positif, condition sans laquelle la réfraction ne pourrait avoir lieu de la manière que nous avions supposée.

485. — De plus, ceci nous procure un moyen pratique très facile de nous assurer, avec la plus grande précision, du rapport de dispersion des deux milieux. Supposons que la lentille convexe de crown-glass soit un peu plus que corrigée par un verre concave de flint-glass, et que les couleurs soient détruites par la séparation des lentilles, on mesurera les longueurs focales $\frac{1}{L'}$ et $\frac{1}{L''}$ et l'intervalle t : la valeur du rapport de dispersion π sera alors

$$\pi = \frac{p'}{p''} = -\frac{L''}{L'} (1 - t L')^2.$$

---

§ III. — *De l'absorption ou de l'extinction de la lumière par des milieux non cristallisés.*

Tous les milieux absorbent la lumière ; ils absorbent inégalement les couleurs. — Expérience. — Loi de la transmission. — Loi de l'absorption d'un milieu figurée par une courbe. — Dernière teinte d'un milieu absorbant. — Les teintes varient avec l'épaisseur ; exemple numérique. — Pouvoir éclairant relatif des rayons du spectre. — Milieux rouges, milieux verts, milieux dichromatiques, milieux bleus. — Isolation du violet extrême. — Milieux pourpres, milieux combinés. — Isolation d'un rayon homogène de couleur rouge extrême. — La chaleur influe sur le pouvoir absorbant. — Il y a des personnes qui ne voient que deux couleurs. — Hypothèse de Mayer. — Modification de l'échelle de Mayer. — Teintes blanches, grises, neutres, rouges, jaunes, bleues, brunes, pourpres et vertes. — La même couleur peut résulter de diverses combinaisons de celles du spectre. — Hypothèse du docteur Young. — Exemple numérique. — Phénomènes produits par des flammes colorées. — Flammes de combustibles qui brûlent faiblement ; flammes de combustibles en état d'ignition complète ; flammes colorées par des sels. — La couleur dépend surtout de la base des sels.

484. — La *transparence* est la propriété dont jouissent

certains milieux d'être perméables à la lumière, c'est-à-dire de la laisser passer entre leurs molécules. Un milieu est plus ou moins *transparent*, suivant que la quantité de lumière qu'il transmet est plus ou moins considérable par rapport à celle qu'il reçoit. Parmi tous les milieux pondérables, nous n'en connaissons aucun dont la transparence soit parfaite. L'on peut supposer qu'une partie des rayons est réfléchie par les molécules qu'elle rencontre sur son passage; ou si cette explication paraît trop grossière pour l'état actuel de la science, l'on peut dire que ces rayons sont arrêtés ou détournés par les forces qui résident dans les atomes dont les corps sont formés.

L'expérience nous apprend que les milieux les plus rares et les plus diaphanes, tels que l'air, l'eau, le verre, etc., éteignent graduellement le rayon lumineux qui les pénètre, et que, si leur épaisseur est assez considérable, ils l'affaiblissent au point de ne plus faire impression sur nos organes. Ainsi, sur le sommet des hautes montagnes, le nombre des étoiles visibles à l'œil nu est beaucoup plus grand que dans la plaine, la faible clarté des plus petites étant trop diminuée par les couches inférieures de l'atmosphère pour affecter encore notre vue. De même, plusieurs objets cessent d'être visibles à de grandes profondeurs sous une eau parfaitement limpide. Le docteur Olbers va jusqu'à supposer que le même phénomène a lieu pour les milieux impondérables (si toutefois il en existe) qui remplissent les espaces célestes, et le regarde comme la cause du petit nombre d'étoiles (de cinq à dix millions) que nous pouvons apercevoir avec les plus forts télescopes. Il est probable qu'on sera long-temps avant de pouvoir confirmer ou réfuter cette singulière opinion.

485. — S'il n'est point, dans la nature, de corps entièrement diaphanes, il n'en est pas non plus d'absolument opaques; l'un des métaux les plus denses, l'or, réduit en feuilles assez minces, laisse passer la lumière. Il est prouvé d'ailleurs, par la couleur de la lumière transmise, qui est

verte, même quand les rayons incidents sont incolores, que les rayons traversent la substance même du métal, et non des trous ou des fentes imperceptibles. Le plus opaque de tous les corps, le charbon, devient un des plus transparents quand son état d'agrégation vient à changer, comme dans le diamant. Tout corps, quoique de couleur très foncée et opaque en apparence, ne devient coloré qu'autant que les rayons qui le rendent visible ont pénétré sa substance : car, s'ils n'étaient que réfléchis à sa surface, ils paraîtraient blancs. Si les couleurs des corps ne dépendaient que des surfaces, l'amincissement de ces corps ne pourrait influer sur leur coloration. Mais cette hypothèse s'éloigne tellement de la vérité, que tous les corps colorés, quelque foncées que soient leurs teintes, paraissent d'une couleur plns pâle lorsque leur épaisseur vient à diminuer : ainsi les poudres de tous les corps colorés, ou les traces qu'ils laissent quand on les frotte sur un corps d'une dureté plns grande que la leur, sont toujours d'une couleur moins foncée que celle des corps en masse.

486. — Cette diminution graduelle de l'intensité des rayons transmis à travers un milieu d'une transparence imparfaite s'appelle *absorption*. Jamais les rayons de différente couleur n'en sont également affectés : c'est de cette inégalité que dépend la couleur des corps vus au moyen de la lumière transmise. Un rayon blanc qui traverse un milieu parfaitement diaphane devrait, à son émergence, avoir tous ses éléments colorés dans la même proportion, parce que la lumière réfléchie par ses deux surfaces est incolore ; mais cette blancheur absolue dans le rayon transmis ne s'observe jamais : les milieux sont donc inégalement perméables aux divers rayons colorés. Chaque rayon du spectre a son *indice de transparence* particulier pour chaque milieu : cet indice, de même que celui de réfraction, varie suivant la couleur des rayons et la nature des milieux.

487. — On obtient la preuve la plus convaincante de ce

pouvoir absorbant qui varie pour chaque couleur, en regardant à travers un morceau de verre d'azur, produit très commun dans les arts, l'image d'un trait lumineux (comme une fente dans le volet d'une chambre obscure), que l'on a réfractée à l'aide d'un prisme dont l'arête est parallèle à ce trait, et qui se trouve dans son lieu de moindre déviation. Si le verre est extrêmement mince, tous les rayons paraissent au travers; mais s'il est d'une épaisseur moyenne ($\frac{1}{20}$ de pouce, par exemple), le spectre offrira une apparence très singulière : il semblera composé d'une multitude de taches séparées par de larges intervalles entièrement noirs; ce qui provient de l'extinction de la lumière qui correspondait à ces intervalles. En employant un verre moins épais, les intervalles, au lieu d'être noirs, sont faiblement et irrégulièrement éclairés. Si l'épaisseur, au contraire, vient à augmenter, les espaces noirs s'élargissent jusqu'à ce qu'enfin toutes les couleurs entre le rouge et le violet extrêmes soient complétement effacées.

488. — L'hypothèse la plus simple que l'on puisse former sur l'extinction d'un rayon de lumière homogène qui traverse un milieu homogène est de supposer que, pour chaque tranche d'égale épaisseur, le rayon perd la même partie aliquote de l'intensité qu'il avait au moment de son incidence sur cette tranche. Ainsi, en supposant que 1,000 rayons rouges pénètrent un certain verre, et qu'il s'en éteigne 100 en traversant un dixième de pouce, il en restera 900 à cette profondeur; s'il s'éteint encore un dixième de ceux-ci, ou 90, au passage à travers le second dixième, il n'en restera plus que 810, dont un dixième, ou 81, s'éteindra en traversant le dixième suivant : de manière que 729 seulement échapperont à l'absorption, et ainsi de suite. En d'autres termes, la quantité des rayons non absorbés, en traversant une épaisseur quelconque t, diminuera en progression géométrique, tandis que t croîtra par degrés égaux. En représentant donc par l'unité le nombre total des rayons incidents, et par

y le nombre de ceux qui échappent à l'absorption après avoir traversé l'unité d'épaisseur, y^t sera le nombre des rayons non absorbés pour une épaisseur quelconque t.

Cette théorie suppose seulement que les rayons n'acquièrent pas, en traversant une tranche, une facilité nouvelle pour pénétrer les autres. En outre, y est nécessairement moindre que l'unité, et dépend à la fois de la nature du rayon et de celle du milieu.

Il suit de là qu'en désignant par C le nombre des rayons rouges d'égale intensité qui composent un rayon blanc, par C' celui des rayons qui les suivent dans l'ordre de réfrangibilité, et ainsi de suite, le rayon blanc aura pour expression

$$C + C' + C'' + \text{etc.},$$

et le rayon transmis à travers l'épaisseur t,

$$C \cdot y^t + C' \cdot y'^t + C'' \cdot y''^t + \text{etc.},$$

chaque terme dénotant l'intensité du rayon auquel il correspond, ou le rapport de cette intensité avec celle de ce rayon avant qu'il n'entrât dans le milieu.

489. — Il est évident, d'après la forme de cette expression, que, à strictement parler, il ne peut jamais y avoir d'extinction totale pour une épaisseur finie du milieu; mais, si la fraction y est assez petite, une épaisseur médiocre suffira pour rendre tout-à-fait insensible la fraction y^t. Dans le cas précédent, où un dixième de pouce d'épaisseur éteignait un dixième des rayons rouges, un pouce entier ne laisserait passer que $(\frac{9}{10})^{10}$ ou 304 rayons sur mille; tandis qu'une épaisseur décuple ne laisserait échapper que $(\frac{9}{10})^{100} = 0.0000266$, c'est-à-dire moins de 3 rayons sur 100,000 : ce qui serait presque la même chose qu'une opacité parfaite.

490. — Soit x l'indice de réfraction d'un rayon quelconque par rapport à l'eau : nous pouvons regarder y comme

une fonction de x. En élevant sur la ligne R V (fig. 112), qui représente la longueur totale du spectre produit par l'eau, les ordonnées R R', M N, V V', toutes égales entre elles et à l'unité; puis d'autres ordonnées R r, M P, V v, représentant la valeur de y pour les rayons correspondants, la courbe rPv sera le lieu géométrique de P, et peindra aux yeux l'intensité d'action du milieu sur le spectre. La droite R' N V' offrira l'emblème d'un milieu d'une transparence parfaite. En supposant toujours l'épaisseur du milieu représentée par 1, et

$$\text{M P}' : \text{M P} :: \text{M P} : \text{M N},$$

$$\text{M P}'' : \text{M P}' :: \text{M P}' : \text{M P}, \text{ etc.},$$

les lieux de P', P'', etc., seront les courbes qui représenteront les quantités de lumière transmises à travers les épaisseurs 2, 3, etc.; et ainsi de suite, pour une épaisseur quelconque, même au-dessous de 1 comme pour la courbe gUu.

491. — Quelle que soit la couleur du milieu, tous les rayons sont transmis indifféremment : car, lorsque

$$t = 0, \quad y^t = 1,$$

quel que soit y, et la courbe g U u approche infiniment de la droite R' N V'. Aussi tous les verres de couleur paraissent blancs lorsqu'on les souffle en bouteilles excessivement minces : il en est de même de l'écume d'un liquide coloré.

492. — Si un milieu laisse passer tels rayons plutôt que tels autres, on peut, en augmentant son épaisseur, lui donner une teinte aussi foncée que l'on voudra. En effet, quelque faible que soit la différence entre y et l'unité, ou entre les valeurs de y pour des rayons différents, t peut toujours être pris assez grand pour que rien ne limite la petitesse de y^t, ou du rapport de y^t à y'^t.

493. — Pour les milieux d'une couleur très foncée, toutes les valeurs de y sont petites. Si elles étaient égales, le milieu affaiblirait simplement le rayon lumineux sans le colorer; mais l'on ne connaît jusqu'à présent aucun milieu semblable.

494. — Si la courbe rPv, emblème d'un milieu absorbant, avait un maximum dans une partie quelconque du spectre, dans le vert, par exemple (fig. 113), quelle que fût la proportion des autres couleurs par rapport à celle-ci, on pourrait toujours la faire dominer en donnant au milieu une épaisseur suffisante. La *dernière teinte* du milieu ou le dernier rayon qu'il pourra transmettre sera d'une couleur parfaitement homogène, et doué de la réfrangibilité particulière à laquelle correspond l'ordonnée maximum. Ainsi les verres de couleur verte, dont l'emblème est la fig. 113, deviennent de plus en plus foncés quand leur épaisseur vient à augmenter, tandis que les verres jaunes (fig. 114) changent de teinte en devenant plus épais; ils brunissent d'abord, et passent ensuite au rouge.

495. — Ce changement de teinte par une augmentation d'épaisseur s'observe assez souvent; et, quoiqu'il semble étrange au premier abord, ce phénomène n'est qu'une conséquence nécessaire de la doctrine précédente. Si l'on verse entre deux plaques de verre formant un angle assez aigu une solution de vert de vessie, ou mieux de muriate de chrome, et qu'à travers la partie de ce prisme la plus voisine de l'arète l'on regarde un morceau de papier ou un nuage blanc, cet objet paraîtra d'un beau vert; mais si l'on fait passer le prisme devant l'œil, de manière à regarder successivement à travers une épaisseur de plus en plus grande, le vert deviendra de plus en plus foncé, jusqu'à ce qu'il se change en un brun douteux, qui passe bientôt au rouge du sang. Pour se rendre compte de ce phénomène, l'on observera que les courbes qui représentent l'absorption affectent les formes les

plus irrégulières, et ont souvent une foule de maxima et de minima qui correspondent à des couleurs différentes. Les liquides verts dont nous venons de parler ont deux maxima distincts (fig. 115), dont l'un correspond au rouge extrême et l'autre au vert; mais les longueurs absolues de ces maxima sont inégales, le rouge surpassant le vert. Comme les rayons rouges éclairent très faiblement, le vert, qui a beaucoup de vivacité, affecte l'œil davantage et prédomine d'abord : cependant la présence de ces rayons rouges se fait déjà sentir avant que l'épaisseur soit devenue assez grande pour éteindre entièrement les rayons verts. Tel est le cas représenté par les courbes inférieures de la fig. 115.

Pour rendre ce raisonnement plus sensible par un exemple numérique, supposons que l'indice de transparence ou la valeur de y pour le muriate de chrome égale 0.9 pour les rayons rouges extrêmes, 0.1 pour le rouge ordinaire, l'orangé et le jaune; 0.5 pour le vert, et 0.1 pour le bleu, l'indigo et le violet. Supposons de plus un rayon de lumière blanche composé de 10,000 rayons colorés *également éclairants* dans la proportion suivante :

Rouges extrêmes . . .	200
Rouges et orangés . .	1300
Jaunes	3000
Verts	2800
Bleus.	1200
Indigo	1000
Violets	500

Après avoir traversé une épaisseur = 1, les rayons transmis seront au nombre de

Rouges extrêmes. . .	180
Rouges et orangés . .	130
Jaunes	300
Verts	1400
Bleus	120

Indigo	100
Violets	50

Après avoir traversé la seconde unité d'épaisseur, il en restera

Rouges extrêmes . .	162
Rouges et orangés . .	15
Jaunes.	30
Verts	700
Bleus	12
Indigo.	10
Violets.	5

Après leur passage à travers la troisième, quatrième, cinquième et sixième unité,

	3e.	4e.	5e.	6e.
	—	—	—	—
Rouges extrêmes . .	146	131	118	106
Rouges et orangés. .	1	0	0	0
Jaunes	3	0	0	0
Verts.	350	175	87	43
Bleus.	1	0	0	0
Indigo	1	0	0	0
Violets	0	0	0	0

Ce qui montre que le vert l'emporte beaucoup sur les autres couleurs après la première transmission. Il domine encore après la deuxième; mais, après la troisième, le rouge s'y mêle en assez grande quantité pour que la pureté de la teinte en soit visiblement altérée. A la quatrième transmission, on peut regarder toutes les autres couleurs comme entièrement absorbées, et il ne reste plus qu'une teinte sombre entre le rouge et le vert; le rouge devient de plus en plus dominant après les transmissions suivantes, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus le distinguer du rouge homogène donné par l'extrémité du spectre.

496. — Il est indifférent, pour la conclusion que l'on doit en tirer, de supposer que les parties les plus sombres du spectre soient éclairées par un plus petit nombre de rayons que le reste, ou par un nombre égal de rayons moins éclatants; mais la première hypothèse a sur la seconde l'avantage de se prêter aux évaluations numériques. Dans l'exemple précédent, les nombres étaient pris au hasard; mais Frannhofer a fait une série d'expériences pour déterminer numériquement le pouvoir éclairant de tous les rayons du spectre : il avait construit à cet effet la courbe fig. 116, dont chaque ordonnée représente le pouvoir éclairant du rayon au point où elle est élevée, ou le nombre de rayons, doués de cette réfrangibilité particulière, qui entrent dans la composition de la lumière blanche. Si nous voulions avoir égard à cette inégalité du pouvoir éclairant dans notre construction géométrique, nous devrions figurer la lumière blanche, non par une ligne droite, comme dans les fig. 112, 113 et 114, mais par une courbe semblable à la fig. 116, et faire dépendre les autres courbes de celle-ci, en suivant les règles tracées plus haut. Mais comme l'unique usage de ces constructions est de peindre à la vue avec beaucoup de clarté l'intensité d'action d'un milieu sur le spectre, cette modification serait plutôt désavantageuse qu'utile.

497. — En examinant des morceaux de verre d'azur de différente épaisseur, on les trouvera d'un bleu pur tant qu'ils seront assez minces. Quand leur épaisseur augmentera, ils prendront une teinte rougeâtre de plus en plus prononcée jusqu'au rouge foncé; il faut néanmoins une épaisseur considérable pour produire cet effet. En examinant les teintes à l'aide d'un prisme, l'on trouvera que ce milieu a pour emblème la fig. 117, et que, des quatre ordonnées maxima, la plus grande correspond au rouge extrême, et diminue avec une telle rapidité que cette couleur est presque entièrement isolée. L'ordonnée maximum qui la suit correspond au rouge ordinaire, la troisième au jaune ordinaire et la

dernière au violet, les ordonnées croissant d'une manière continue vers l'extrémité du spectre. Ainsi, quand on emploie un verre d'azur de 0.042 de pouce d'épaisseur, l'extrémité rouge du spectre se divise en deux parties, dont l'une, la moins réfractée, forme une bande bien terminée de lumière rouge parfaitement homogène, séparée de l'autre partie rouge par une large bande noire. Le rouge le plus réfracté est presque aussi homogène que la couleur précédente, et sa nuance est tout-à-fait la même, sans aucun mélange d'orangé. La réfraction la plus forte a lieu très près de la raie noire D dans le spectre : une ligne noire étroite et bien marquée sépare cette couleur du jaune, qui forme une bande bien terminée et d'un éclat très pur, dont la largeur surpasse celle de la première bande rouge. Le jaune est séparé du vert par un intervalle obscur, mais pas entièrement noir; le vert est terne et mal terminé; mais le violet est transmis presque sans perte. Une épaisseur double (0.084 de pouce) arrête le rouge de la seconde espèce, affaiblit considérablement le jaune, et le confond presque avec le vert, qui est aussi très altéré. L'extrême rouge conserve néanmoins tout son éclat, et le violet perd très peu de son intensité. Enfin, l'épaisseur devenant très grande, le rouge et le violet extrêmes peuvent seuls traverser le verre.

498. — Parmi les milieux diaphanes que l'on rencontre le plus fréquemment, il faut distinguer ceux dont les courbes-emblèmes sont telles que leurs ordonnées décroissent régulièrement avec plus ou moins de rapidité depuis le rouge jusqu'au violet, c'est-à-dire dont le pouvoir absorbant par rapport aux divers rayons est plus ou moins en raison directe de la réfrangibilité de ces mêmes rayons. Dans les milieux rouges et écarlates, le pouvoir absorbant croît très vite en passant du rouge au violet; il croît plus lentement dans les milieux jaunes, orangés et bruns; mais dans tous il agit avec beaucoup d'énergie sur les rayons violets, qu'il éteint complétement. C'est pourquoi tous ces milieux de-

viennent rouges quand on leur donne l'épaisseur convenable : tels sont les verres rouges, écarlates et bruns; le vin de Porto, l'infusion de safran, le permuriate de fer, le muriate d'or, l'eau-de-vie, etc.

499. — La plupart des milieux verts ont un seul maximum de transmission correspondant aux rayons verts dans le spectre, et leur teinte ne devient que plus pure par l'accroissement de leur épaisseur : tels sont les verres et les sels de cuivre, de nickel, etc., qui sont de cette couleur; ils absorbent les deux extrémités du spectre avec une grande énergie, le rouge plus que le violet cependant, si leur nuance approche du bleu; c'est le contraire si elle approche davantage du jaune.

Il y a des milieux dont la courbe-emblème a deux maxima, et que l'on pourrait en conséquence appeler *dichromatiques*, puisqu'ils ont réellement deux couleurs distinctes. Dans la plupart le maximum vert est moindre que le maximum rouge, ce qui rend le vert moins pur à mesure que l'épaisseur du milieu devient plus considérable, et lui donne alors une teinte livide et rougeâtre. Cependant cela n'arrive pas toujours. Ces milieux sont, entre autres, le muriate de chrome, la solution de vert de vessie, le manganésiate de potasse, l'infusion alkaline des pétales de la pivoine officinale et de plusieurs autres fleurs rouges, et les mélanges de liquides rouges et verts, ou rouges et bleus.

500. — Les milieux bleus sont en très grand nombre et presque tous dichromatiques; quelques uns ont même plusieurs maxima dans leurs courbes-emblèmes : mais leur caractère distinctif est l'absorption puissante qu'ils exercent sur les rayons verts et rouges les plus éclatants, et leur peu d'action sur la partie la plus réfrangible du spectre. Parmi ceux dans lesquels ce pouvoir absorbant paraît croître avec le plus de rapidité et de régularité, depuis le violet jusqu'au rouge, l'on peut compter les solutions bleues du cuivre : tel est le

bleu magnifique que l'on tire du sulfate de cuivre saturé avec excès de carbonate d'ammoniac. Le violet extrême paraît devoir traverser une épaisseur quelconque de ce milieu; et cette propriété, jointe à celle d'être inaltérable, le rend très précieux dans les recherches d'optique. Un tube de quelques pouces de longueur, rempli de cette solution et fermé aux deux bouts par des plaques de verre, est le meilleur appareil pour faire des expériences sur les rayons violets. L'ammonio-oxalate de nickel transmet les rayons bleus et rouges extrêmes, mais il arrête les rayons violets.

501. — Les milieux pourpres absorbent le milieu du spectre, et sont par conséquent toujours dichromatiques, les uns ayant pour *dernière teinte* le rouge, et les autres le violet : tels sont les verres pourpres et cramoisis, les solutions acides et alkalines de cobalt, etc. On pourrait les nommer rouge-pourpres ou violet-pourpres, d'après la couleur de leur dernière teinte.

502. — Quand un rayon traverse une combinaison de plusieurs milieux, l'absorption totale se compose de celles de chaque milieu en particulier.

Soient x, y, z, les indices de transmissibilité d'un rayon donné C par rapport aux milieux donnés dont les épaisseurs sont r, s et t : la partie transmise sera

$$C\ x^r\ y^s\ z^t,$$

et le reste du rayon de lumière blanche (en faisant abstraction des pertes causées par la réflexion aux deux surfaces) sera égal à

$$C\ .\ x^r\ y^s\ z^t + C'\ .\ x'^r\ y'^s\ z'^t + \text{etc.}$$

On voit par cette expression que l'ordre des milieux est indifférent, et qu'on peut par conséquent les mêler, pourvu qu'il ne se produise pas d'effet chimique. L'on peut

aussi, en employant la même construction par laquelle on passe de la ligne droite (qui figure la lumière blanche) à la courbe-emblème du premier milieu, faire dériver de la courbe 1 une autre courbe 2, et ainsi de suite; l'on obtiendra de cette manière une infinité de courbes-emblèmes correspondantes à des teintes différentes.

503. — En profitant de la remarque précédente, l'on peut isoler dans un état d'homogénéité presque parfaite une multitude de rayons colorés : ainsi, en combinant avec le verre d'azur, dont nous avons déjà parlé, un verre rouge ou brun d'une couleur pleine et d'une pureté suffisante, l'on composera un milieu absolument imperméable à tous les rayons autres que les rouges extrêmes.

La réfrangibilité de ces derniers est donnée alors avec tant de précision qu'on peut la prendre pour terme de comparaison dans toutes les recherches d'optique; avantage d'autant plus précieux que les verres qui le procurent sont très communs dans le commerce, et se trouvent chez tous les vitriers. Si l'on ajoute à une semblable combinaison une seule lame de verre de couleur verte, il en résulte une opacité complète. La même espèce de verre nous permet encore d'isoler les rayons jaunes correspondants au maximum Y dans la courbe fig. 117, en la combinant avec deux autres verres, l'un vert pour détruire les rayons les moins réfrangibles, et l'autre brun pour éteindre les plus réfrangibles : l'on peut se procurer ainsi une large bande de lumière jaune sans que cette couleur soit le résultat d'un *mélange* de rouge et de vert.

504. — Le docteur Brewster a découvert que les proportions entre les divers rayons absorbés varient avec la température des milieux. La chaleur rend, en général, les teintes des corps plus foncées : c'est ce qu'observent fréquemment les personnes accoutumées à manier le chalumeau. Le minium et l'oxide rouge de mercure deviennent tellement fon-

cés par la chaleur, qu'ils paraissent presque noirs ; mais ils reprennent leur couleur en se refroidissant. Le docteur Brewster cite, cependant, des exemples, non seulement parmi les verres artificiels, mais même parmi les minéraux transparents, dans lesquels l'élévation de la température faisait passer les corps du rouge au vert ; mais la teinte primitive revenait par le refroidissement, sans que les corps eussent subi d'altération chimique.

505. — L'analyse du spectre au moyen de milieux colorés présente une foule de circonstances dignes de remarque. D'abord, la distribution bizarre et irrégulière des bandes noires qui traversent le spectre, quand on l'examine à travers de semblables milieux ayant plusieurs maxima de transmission, nous reporte visiblement aux *raies fixes* de Fraunhofer et aux phénomènes analogues produits par diverses sources de lumière : nous sommes conduits ainsi à les attribuer à la cause, encore inconnue, qui fait que tel rayon est absorbé de préférence à tel autre. Il n'est pas impossible que les rayons *déficients* dans la lumière du soleil ou des étoiles soient absorbés par l'atmosphère de ces astres ; ou, si nous remontons à l'origine même de la lumière, on peut concevoir que tel rayon coloré soit éteint pendant l'acte même de la transmission par un pouvoir absorbant très intense qui résiderait dans la molécule même d'où il émane. En un mot, la même disposition moléculaire qui fait qu'un corps absorbant ne laisse pas passer tel rayon coloré au travers, ou à côté de lui peut constituer un obstacle *in limine* à la production de ce rayon. Quoi qu'il en soit, les phénomènes sont parfaitement connus, quoique nous ne puissions encore les expliquer d'une manière satisfaisante.

506. — On observera ensuite que toute idée de gradation entre les couleurs, en allant d'une extrémité du spectre à l'autre, disparaît aussitôt que l'on emploie un milieu absorbant. Des rayons d'une réfrangibilité très différente,

comme les deux espèces de rayons rouges mentionnées à l'art. 497, ont absolument la même couleur et ne peuvent être distingués. D'un autre côté, la transition du rouge pur au jaune pur est subite, et le contraste des couleurs est d'autant plus frappant que les intervalles noirs qui les séparent deviennent de plus en plus étroits, quand on donne au verre l'épaisseur convenable, sans qu'on y aperçoive la moindre nuance d'orangé. On peut demander alors ce que devient cette dernière couleur, et comment le rouge le remplace en partie d'un côté et le jaune de l'autre. Ces phénomènes sont assurément propres à nous faire croire que l'analyse de la lumière blanche à l'aide du prisme n'est pas la seule possible, et que la connexion entre la couleur et la réfrangibilité n'est pas aussi intime que Newton l'a supposée. La couleur est une sensation produite par les rayons lumineux : or, si deux rayons inégalement réfrangibles font naître la même sensation de couleur, l'hypothèse contraire à celle de Newton ne paraît pas d'une absurdité manifeste, c'est-à-dire que deux rayons de couleur différente peuvent avoir le même indice de réfraction. Il est évident qu'alors un simple changement de direction produit par un prisme, etc., ne pourrait jamais séparer ces rayons; mais que, s'ils étaient inégalement absorbés par un milieu qu'ils devraient traverser, l'analyse se ferait par l'extinction d'une partie du rayon composé. Cette idée a été défendue par le docteur Brewster, dans les *Transactions philosophiques d'Édimbourg*, vol. 9, et semble confirmée par des expériences publiées dans le même volume de cette collection. D'après cette doctrine, le spectre se composerait au moins de trois spectres distincts, dont les couleurs seraient le rouge, le jaune et le bleu, qui empiéteraient les uns sur les autres; chaque couleur aurait son maximum d'intensité aux points où le spectre composé offre les teintes les plus fortes et les plus éclatantes.

507. — Il faut avouer cependant que cette théorie n'est pas à l'abri de toute objection. Une des plus fortes résulte

d'une affection singulière de l'organe de la vue, qu'il n'est pas même très rare de rencontrer. Quand on présente à certains individus, non les couleurs ordinaires des peintres, mais des teintes optiques d'une composition connue, elles leur paraissent toutes jaunes ou bleues. Nous avons examiné avec beaucoup d'attention un opticien distingué dont les yeux (ou plutôt un œil, car il avait perdu l'autre par un accident) offraient cette particularité : nous nous sommes assuré que tous les rayons du prisme produisaient en lui la sensation de *clarté*, et lui rendaient les objets visibles, ce qui est contraire à l'opinion reçue; de manière que ce vice d'organisation ne provenait aucunement de l'insensibilité de la rétine à l'égard de certains rayons d'une *réfrangibilité particulière*, ni d'une coloration des humeurs de l'œil qui eût empêché certains rayons d'atteindre la rétine (comme on l'avait ingénieusement supposé), mais d'un défaut dans le sensorium même, qui rendait celui-ci incapable d'apprécier avec exactitude la différence entre les rayons qui produit la diversité des couleurs.

La table suivante est le résultat d'une série d'expériences dans lesquelles on soumettait au jugement de l'individu en question les teintes successives produites par la lumière polarisée qui traversait une lame de mica inclinée d'une certaine manière que nous décrirons bientôt. Dans chaque expérience, on lui présentait deux cercles uniformément colorés, placés l'un à côté de l'autre, dont les teintes étaient *complémentaires*, c'est-à-dire que la réunion de ces teintes eût donné le blanc.

COULEURS TELLES QU'ELLES PARAISSAIENT

A UN OEIL ORDINAIRE.

CERCLE A GAUCHE.	CERCLE A DROITE.
Vert pâle	Rose pâle . . . .
Blanc sale	Même couleur. . . . . .
Rose vif.	Vert vif, un peu bleuâtre . .
Blanc	Blanc . . . .
Limite entre le rose et le rouge.	
Vert de pré vif	Cramoisi vif . . . . . .
Bleu terne et verdâtre . . .	Rouge de brique pâle . . .
Pourpre, assez pâle	Jaune pâle. . . . . . .
Beau rose	Beau vert . . . .
Beau jaune	Pourpre . . . .
Vert jaunâtre.	Beau cramoisi. . . . . .
Bleu tirant sur l'indigo . . .	Jaune tirant sur l'orangé . .
Rouge ou rose très foncé . .	Bleu verdâtre, presque blanc .
Jaune éclatant	Bleu plein . . . .
Blanc	Orangé couleur de feu . . .
Pourpre sombre	Blanc . . . .
Orangé d'un rouge terne . .	Blanc . . . .
Blanc	Olivâtre, d'une couleur terne et sale . . . .
Pourpre très sombre. . . .	Blanc . . . .

(1) Tous deux plus colorés qu'auparavant.

(2) Plus éclatants, mais leurs couleurs sont moins pleines.

(3) Couleurs moins riches que les précédentes.

COULEURS TELLES QU'ELLES PARAISSAIENT A L'INDIVIDU EN QUESTION.		INCLINAISON de la lame de mica par rapport à l'œil.
CERCLE A GAUCHE.	CERCLE A DROITE.	
Tous deux pareils, sans plus de couleur qu'un ciel nuageux.		89.5
Plus sombres qu'auparavant, mais sans couleur.		85.0
Bleu très pâle.	Bleu très pâle	81.1
Jaune	Bleu	76.3
Jaune (1)	Bleu	74.9
Bleu (2)	Jaune	72.8
Bleu (3)	Jaune	71.7
Jaune mêlé de beaucoup de bleu (4)	Bleu mêlé de beaucoup de jaune	69.7
Beau jaune	Beau bleu.	68.2
Jaune mêlé de beaucoup de bleu (5)	Bleu mêlé de beaucoup de jaune	67.0
Bleu	Jaune	65.5
Jaune (6)	Bleu	63.8
Beau jaune vif	Très beau bleu	62.7
Très peu coloré	Jaune rougeâtre.	61.2
Bleu obscur, mal éclairé	Blanc avec une légère teinte de jaune et de bleu	59.5
Jaune	Blanc mêlé de bleu et de jaune	59.0
Blanc	Noir	57.1
Noir	Blanc	55.0

(4) Les couleurs deviennent plus prononcées; le jaune a plus d'éclat qu'un cadre doré.

(5) Couleurs les plus vives de toutes.

(6) Couleurs vives, surtout le jaune.

508. — On lui demanda ensuite de disposer l'appareil de manière à voir les couleurs dans un ordre différent et à faire contraster le plus fortement possible celles des deux cercles. Voici les résultats que l'on obtint :

COULEURS pour UN OEIL ORDINAIRE.		COULEURS pour L'INDIVIDU EN QUESTION.		INCLINAISON de la lame de mica par rapport à l'œil.
CERCLE A GAUCHE.	CERCLE A DROITE.	CERCLE A GAUCHE.	CERCLE A DROITE.	
Rouge pâle et rosé.	Bleu verdâtre.	Jaune.	Bleu.	69.1
Bleu verdâtre.	Rouge pâle et rosé.	Bleu.	Jaune.	65.3
Jaune.	Bleu.	Jaune.	Bleu.	63.1
Blanc.	Orangé couleur de feu.	Bleu.	Jaune.	61.1
Rouge de brique pâle.	Blanc.	Jaune.	Bleu.	58.5
Indigo.	Jaune pâle.	Bleu.	Jaune.	54.2
Jaune.	Indigo.	Jaune.	Bleu.	52.1

Il paraît donc que les yeux de cet homme sont incapables de juger d'autres couleurs que le bleu et le jaune, et que ces mots correspondent dans sa nomenclature aux rayons les plus et les moins réfrangibles, les premiers excitant en lui une sensation qu'il nomme *le bleu*, et les autres une sensation qu'il nomme *le jaune*. L'on a parlé quelquefois d'individus dont la vue était bonne d'ailleurs, mais qui étaient entièrement dépourvus de toute idée de couleur et ne distinguaient les différentes teintes que par leur éclat plus ou moins vif : ce cas est probablement très rare.

509. — Dans un essai *De affinitate colorum* (Opera in-

edita, 1775), Mayer regarde toutes les couleurs comme provenant de trois couleurs primitives, le rouge, le jaune et le bleu; le blanc est un mélange de rayons de toutes les couleurs qui se neutralisent, et le noir une simple négation de lumière.

D'après cette idée, il suffirait de savoir dans quel rapport numérique il faut mêler les couleurs pour en former une échelle qui comprendrait toutes les teintes imaginables. Il propose de représenter les degrés d'intensité de chaque couleur par la suite des nombres naturels 1, 2, 3.... 12, 1 dénotant la teinte la plus faible qui puisse affecter notre œil, et 12 le plus haut degré de coloration ou la somme de tous les rayons de la couleur que l'on considère qui entrent dans la composition de la lumière blanche.

Ainsi r^{12} désigne le rouge plein dans son éclat le plus vif et le plus pur, j^{12} le jaune le plus éclatant, et b^{12} le bleu le plus éclatant.

Pour représenter une teinte mêlée, il combine les symboles des couleurs constitutives.

Ainsi $r^{12} j^{4}$, ou plutôt $12\, r + 4\, j$, représente un rouge tirant beaucoup sur l'orangé, comme celui d'un charbon allumé.

510. — L'échelle de Mayer s'applique très bien aux couleurs qu'il nomme parfaites, et qui proviennent de la lumière blanche par *soustraction* de ses rayons élémentaires d'une ou de plusieurs espèces. Une légère modification dans ce système le rendrait également propre à représenter toutes les nuances possibles, comme nous allons essayer de le démontrer.

Prenons 100 pour l'intensité normale de chaque couleur primitive; ce qui signifie que, pour obtenir une teinte pleine, il faut faire tomber cent rayons *primitifs* d'égale efficacité sur une feuille de papier blanc ou sur toute autre surface parfaitement neutre (c'est-à-dire également disposée à réfléchir tous les rayons). Nous exprimerons par $x\, R + y\, J + z\, B$ la

couleur produite par l'incidence simultanée, sur la même surface, de x rayons rouges primitifs, de y rayons jaunes du même degré d'intensité que le rouge, et de z rayons bleus aussi du même degré d'intensité. Les combinaisons des valeurs attribuées à x, à y et à z, depuis 1 jusqu'à 100, représenteront autant de teintes différentes, dont le nombre sera par conséquent

$$100 \times 100 \times 100 = 1{,}000{,}000\,;$$

ce qui est plus que suffisant pour exprimer toutes les nuances que l'œil peut distinguer.

On dit que les Romains imitaient dans leurs mosaïques plus de 30,000 teintes. Comme les couleurs employées par les peintres sont nécessairement beaucoup moins nombreuses que celles que nous offre la nature, en supposant même que le nombre de celles-ci soit dix fois plus grand, elles se trouveront toutes comprises dans notre échelle.

Il ne nous reste plus qu'à examiner jusqu'à quel point les teintes elles-mêmes sont susceptibles d'être exprimées par l'échelle proposée.

511. — Considérons d'abord les teintes blanches, grises et neutres. Les teintes neutres les plus parfaites, qui ne sont en réalité que du blanc plus ou moins intense, sont celles des nuages pendant un jour ordinaire où le soleil brille de temps en temps.

Depuis l'ombre la plus épaisse jusqu'à la blancheur éblouissante de ces nuages amoncelés que le soleil éclaire de tous ses feux, nous n'avons qu'une série de teintes blanchâtres ou grises représentées par des symboles tels que

$$R + J + B,\ 2R + 2J + 2B,\ \text{ou}\ n(R + J + B).$$

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le ciel à travers un tube noirci à l'intérieur, pour prévenir l'influence que

les objets étrangers pourraient exercer sur notre jugement : une partie quelconque du nuage le plus sombre, observée de cette manière, et comparée à une ombre plus ou moins épaisse projetée sur un papier blanc, n'en semblera différer aucunement.

512. — Les diverses intensités des teintes pures de rouge, de jaune et de bleu, sont représentées par nR, nJ et nB. Elles sont rares dans la nature; cependant le sang, la dorure fraîche ou la gomme-gutte détrempée, et l'outre-mer, en offrent des exemples. L'écarlate et les rouges vifs, comme le minium et le vermillon, ne sont point exempts d'une certaine nuance de jaune et même de bleu. Toutes les couleurs primitives acquièrent un éclat beaucoup plus vif quand elles sont mêlées de blanc; et même, dès qu'une couleur primitive est excessivement brillante, l'on peut être sûr qu'elle est plus ou moins combinée avec le blanc. Le bleu céleste n'est que du blanc mêlé avec une quantité de bleu assez médiocre.

513. — Le mélange du rouge et du jaune donne toutes les nuances de l'écarlate, de l'orangé et du brun foncé, quand les intensités sont faibles. Si l'on y ajoute du blanc, on obtient les couleurs citron, paille, argile, et tous les bruns vifs. Toutes les teintes brunes sont d'autant plus sombres et plus foncées que les coefficients sont plus petits.

514. — Les bruns sont des teintes essentiellement sombres dont l'effet principal est de contraster avec d'autres couleurs plus brillantes qui se trouvent auprès. Pour faire du brun, le peintre mêle du noir et du jaune ou du noir et du rouge, tels qu'on les trouve dans le commerce, ou il les mélange tous les trois : son but est alors d'éteindre la lumière et de ne laisser apercevoir qu'un reste de couleur. Il y a une espèce de verre brun employé fréquemment dans les vitraux colorés, qui, examiné au prisme, transmet le rouge, l'orangé et le jaune en abondance, très peu de vert et pas de bleu pur. La

petite quantité de bleu qu'il laisse passer doit provenir de celui qui entre dans la composition du vert, en adoptant le système de Mayer. Le symbole qui caractérise cette espèce de verre est peut-être d'une forme semblable à celle-ci :

$$10\ R + 9\ J + 1\ B,$$

$$\text{ou}\ (9\ R + 8\ J) + 1\ (R + J + B);$$

c'est-à-dire que sa couleur est formée de rayons orangés représentés par $9\ R + 8\ J$ et d'un rayon blanc. Il faut avouer cependant que la composition du brun est l'application la moins satisfaisante du système de Mayer, qui l'a même passée sous silence.

515. — Les combinaisons du rouge et du bleu, et leurs mélanges avec le blanc, donnent toutes les variétés de cramoisi, de pourpre, de violet, de rose, etc. Le pourpre le plus riche est entièrement exempt de jaune ; le violet du spectre comparé à l'indigo paraît sensiblement rouge, et doit par conséquent être regardé comme un mélange de rayons rouges et de rayons bleus.

516. — Le bleu et le jaune combinés produisent un vert riche et brillant ; si ces couleurs élémentaires sont dans une juste proportion, on ne saurait distinguer le vert qui en résulte d'avec celui du spectre.

Quand on mêle une poudre bleue avec une poudre jaune, ou que l'on couvre un papier de lignes très serrées, alternativement jaunes et bleues, rien ne surprend davantage que de voir les teintes élémentaires disparaître entièrement, sans que l'imagination puisse même se les rappeler. Un des faits les plus concluants en faveur du système des trois couleurs primitives et de la possibilité d'un autre mode de décomposition de la lumière que par le moyen du prisme, est l'imitation parfaite du vert prismatique par un mélange de rayons adjacents qui en diffèrent beaucoup, tant par leur réfrangibilité que par leur couleur.

517. — L'hypothèse de trois couleurs primitives dont les combinaisons produisent toutes les couleurs du spectre explique aisément pourquoi des teintes que l'on ne saurait distinguer entre elles peuvent être formées par différents mélanges des sept couleurs supposées par Newton, à qui l'on doit cette remarque. Ainsi l'on peut indifféremment regarder la lumière blanche comme la réunion de

$$\mathrm{R}+\mathrm{J}+\mathrm{B}=\begin{cases}(a+b+c)\text{ rayons de rouge pur,}\\ +(d+e+f)\text{ rayons de jaune pur,}\\ +(h+i+k+l)\text{ rayons de bleu pur,}\end{cases}$$

ou de

[b rayons de rouge pur $=\mathrm{R}'$],
+ [$(c+d)$ ray. orang. $=c$ ray. roug. $+d$ ray. jaun. $=\mathrm{O}'$],
+ [e ray. de jaune pur $=\mathrm{J}'$],
+ [$(f+h)$ ray. verts $=f$ ray. jaun. $+h$ ray. bleus $=\mathrm{G}'$],
+ [$(g+i)$ ray. bleus prism. $=g$ ray. jaun. $+i$ ray. bleus $=\mathrm{B}'$],
+ [k ray. indigo ou de bleu pur $=\mathrm{I}'$],
+ [$(l+a)$ ray. viol. $=l$ ray. bleus $+$ a ray. roug. $=\mathrm{V}'$];

et une teinte quelconque représentée par

$$x\,.\,\mathrm{R}+y\,.\,\mathrm{J}+z\,.\,\mathrm{B}$$

peut l'être également par

$$m\,\mathrm{R}'+n\,\mathrm{O}'+p\,\mathrm{J}'+q\,\mathrm{G}'+r\,\mathrm{B}'+s\,\mathrm{I}'+t\,\mathrm{V}',$$

pourvu que m, n, p, etc., satisfassent aux équations

$$mb+nc+ta=x,\quad nd+pe+qf+rg=y,$$
$$qh+ri+sk+tl=z.$$

518. — En partant de ce qui précède, nous allons démontrer que, sans s'écarter de la doctrine de Mayer, on peut prendre également trois autres rayons du spectre pour

couleurs fondamentales, et s'en servir pour composer toutes les autres, en n'ayant égard qu'à la teinte prédominante qui doit en résulter, sans considérer si elle est plus ou moins mêlée de blanc : c'est ainsi que le docteur Young a choisi pour couleurs fondamentales le rouge, le vert et le violet. Pour établir sa doctrine, il s'appuie de ce fait d'expérience, que l'on peut obtenir une sensation parfaite de jaune ou de bleu avec un mélange de rouge et de vert ou de vert et de violet. (*Leçons de physique*, p. 439.) Si l'on réunit m rayons jaunes et n rayons bleus, il en résultera une sensation parfaite de jaune, à moins que m ne soit très petit par rapport à n; mais, en adoptant la composition de la lumière blanche que nous avons donnée plus haut, la couleur précédente équivaut à

$$n\mathrm{R} \text{ ray. roug.} + (m+n)\,\mathrm{J} \text{ ray. jaun.} + n\mathrm{B} \text{ ray. bleus.}$$

D'ailleurs, en mêlant P rayons rouges (chacun de l'intensité b) avec Q rayons verts (chacun de l'intensité f pour le jaune qui entre dans sa composition, et de l'intensité h pour le bleu) tels que nous les avons supposés dans le spectre (art. 517), le mélange se composera de

$$\mathrm{P}\,.\,b \text{ ray. roug.} + \mathrm{Q}\,.\,f \text{ ray. jaun.} + \mathrm{Q}\,.\,h \text{ ray. bleus},$$

expression qui devient identique avec la précédente si l'on prend

$$n\mathrm{R} = \mathrm{P}b,\ (m+n)\,\mathrm{J} = \mathrm{Q}f,\ n\mathrm{B} = \mathrm{Q}h.$$

Eliminant Q de ces deux dernières équations, il vient

$$\frac{m}{n} = \frac{f}{h} \cdot \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{J}} - 1\,;$$

ce qui fournit une relation entre m et n.

Les seules conditions auxquelles il faut satisfaire sont que m soit positif et qu'il ne soit pas trop petit par rapport à n; ce qui peut se faire d'une infinité de manières, en prenant convenablement le rapport de f à h. Si nous supposons pa-

reillement qu'un mélange de m rayons bleus (B) primitifs avec n rayons blancs ($R+J+B$) équivale à P rayons verts du spectre mêlés avec Q rayons violets, nous en déduirons l'équation suivante :

$$\frac{m}{n}=\frac{l}{a}\cdot\frac{R}{B}+\frac{h}{f}\cdot\frac{J}{B}-1.$$

519. — En regardant, par exemple, la lumière blanche comme le résultat de la réunion de 20 rayons rouges primitifs, de 30 jaunes et de 50 bleus, voici quelle sera la composition de toutes les couleurs du spectre :

Rouge, 8 ray. prim. roug. $=h$.
Orangé, 7 ——— roug. + 7 ray. prim. jaun. $=c+d$.
Jaune, 8 ——— jaun. $=e$.
Vert, 10 ——— jaun. + 10 ray. prim. bleus $=f+h$.
Bleu, 6 ——— jaun. + 12 ray. prim. bleus $=g+i$.
Indigo, 12 ——— bleus $=k$.
Violet, 16 ——— bleus + 5 ray. prim. roug. $=l+a$.

La réunion de 15 rayons rouges et de 30 rayons verts produirait alors un nouveau rayon composé de

$15\times 8=120$ ray. roug. prim.,
$30\times 10=300$ ray. jaun. prim.,
et $30\times 10=300$ ray. bleus prim.

On obtiendrait ainsi la même teinte que par la combinaison de 6 rayons blancs avec 4 rayons jaunes primitifs. En mêlant, de la même manière, 75 rayons verts avec 100 rayons violets, il en résultera

$100\times 5=500$ ray. roug. prim.,
$+\ 75\times 10=750$ ray. jaun. prim.,
$+\ 75\times 10+100\times 16=2350$ ray. bleus prim.;

ce qui donnera la même teinte que le mélange de 25 rayons blancs avec 22 rayons bleus primitifs, c'est-à-dire un bleu vif d'une belle nuance. Les nombres précédents n'ont été choisis que pour servir d'exemple, et ne représentent aucunement les véritables rapports entre les rayons colorés du spectre.

520. — Les raies fixes que l'on observe dans le spectre solaire conduisent naturellement à rechercher si d'autres sources de lumière n'offriraient pas le même phénomène. Guidé par l'analogie, Fraunhofer a trouvé que, pour chaque étoile fixe, il y a un système particulier d'espaces obscurs et d'espaces éclairés dans le spectre qu'elle produit; mais les phénomènes les plus curieux sont dus aux flammes colorées. Quand on fait passer leur lumière à travers un prisme, les spectres sont presque aussi irréguliers que ceux qui résultent de la transmission de la lumière du soleil au travers de verres colorés. Le docteur Brewster, M. Talbot et d'autres physiciens, ont observé ces phénomènes avec beaucoup de soin; mais la matière est loin d'être épuisée et offre un vaste champ aux investigations les plus curieuses. Il est aisé de vérifier les faits suivants :

521. — 1° La plupart des combustibles composés d'hydrogène et de carbone, comme le suif, l'huile, le papier, l'alcool, etc., donnent des flammes bleues quand on les allume et que leur combustion est encore imparfaite. En recevant la lumière de ces flammes à travers une fente étroite, pour la décomposer, à l'aide d'un prisme, de la manière décrite à l'art. 487, elles produisent toutes des spectres discontinus, consistant la plupart en lignes étroites d'une réfrangibilité très bornée, et séparées par de larges intervalles entièrement noirs ou beaucoup plus obscurs que tout le reste. Les couleurs qui y prédominent sont le jaune, resserré entre d'étroites limites; le vert jaunâtre, le vert d'émeraude, le bleu pâle et beaucoup de violet.

522. — 2° Quelquefois, lorsque la combustion est violente, comme dans le cas d'une lampe à huile dont on avive la flamme avec un chalumeau (selon Fraunhofer), ou à l'extrémité supérieure de la flamme d'une lampe à esprit de vin, ou quand on jette du soufre dans un creuset chauffé à blanc, on voit briller une grande quantité de lumière jaune parfaitement homogène et bien caractérisée; dans le dernier cas même, presque tout le spectre est de cette couleur. Le docteur Brewster a trouvé qu'on peut obtenir la même lumière jaune en allumant un mélange d'eau et d'esprit de vin que l'on a fait chauffer auparavant. C'est un moyen subsidiaire qu'il propose de se procurer cette lumière quand on en a besoin pour des expériences d'optique.

523. — 3° La plupart des sels, tant à l'état solide qu'à celui de vapeur, ont la propriété de donner une couleur particulière aux flammes qui naissent de leur ignition : c'est ce qu'on peut démontrer par une expérience bien simple, quoique décisive. On mouille une ficelle ou une mèche de coton que l'on a fait bouillir dans de l'eau pure pour être certain qu'elle ne contient aucun sel étranger; puis on la saupoudre avec le sel que l'on veut éprouver, ou on la trempe dans une solution de ce même sel. Dans cet état, on l'approche d'une bougie allumée, en la plongeant non dans la flamme même, mais dans le cône invisible d'air embrasé qui l'entoure. Bientôt le fil, se pénétrant de cire, brûle en petillant, et le cône devient lumineux, en prenant la couleur qui caractérise le sel dont on a fait usage.

524. — L'on a trouvé, de cette manière, qu'en général,

Les sels de soude donnent une lumière jaune abondante et pure;

Les sels de potasse un beau violet pâle;

Les sels de chaux un rouge de brique : dans leurs spectres on remarque aussi une ligne jaune et une belle ligne verte;

Les sels de strontiane donnent un magnifique cramoisi : si l'on analyse leur flamme avec le prisme, l'on voit encore

deux espèces de jaune, dont l'un tire beaucoup sur l'orangé;

Les sels de magnésie ne donnent pas de couleur;

Les sels de lithine donnent une flamme rouge (d'après les expériences au chalumeau du docteur Turner);

Les sels de baryte donnent un beau vert-pomme assez pâle : les flammes de la baryte et de la strontiane forment un contraste remarquable;

Les sels de cuivre donnent un vert superbe ou un bleu verdâtre;

Le sel de fer (protoxide de fer) donne une flamme blanche quand on l'emploie à l'état de sulfate.

De tous les sels, les muriates conviennent le mieux, à cause de leur volatilité. L'on observe les mêmes couleurs quand on jette un des sels précédents, réduit en poudre, sur la mèche d'une lampe à esprit de vin. Pour le sel commun, M. Talbot a reconnu que la lumière de la flamme est entièrement d'un jaune homogène. Comme cette flamme est très facile à produire, et qu'elle reste identiquement la même en tout temps, cette propriété la rend d'une grande ressource pour ce genre d'expériences.

Les couleurs que les différentes bases communiquent à la flamme offrent, dans une foule de cas, un moyen commode et sûr de reconnaître la présence d'une quantité même très petite de ces bases; mais ceci regarde plutôt le chimiste que le physicien.

Les terres pures violemment chauffées, comme l'a essayé dernièrement le lieutenant Drummond en dirigeant sur de petites boules, qu'il en avait formées, les flammes de plusieurs lampes à esprit de vin avivées par le gaz oxygène, émettent à leur surface une lumière d'un éclat prodigieux. Quand cette lumière est décomposée par le prisme, on remarque que les rayons colorés qui la caractérisent se trouvent en excès dans le spectre qu'elle produit : il n'y a donc aucun doute que les teintes de la flamme proviennent des molécules de matière colorante que la violence du feu a réduites à l'état de vapeur.

TROISIÈME PARTIE.

DES THÉORIES DE LA LUMIÈRE.

—

525. — Parmi les diverses théories que les physiciens ont imaginées pour rendre compte des phénomènes de la lumière, il en est deux qui méritent spécialement notre attention. La première, qui est due à *Newton*, et qui porte le nom de ce grand homme, suppose la lumière composée d'une infinité de molécules excessivement subtiles, projetées par les corps lumineux avec toute la vitesse que nous connaissons à la lumière, et soumises à l'action des forces attractives et répulsives des corps sur lesquels elles viennent tomber : ces corps les détournent de leur route rectiligne, et les réfractent ou réfléchissent suivant des lois connues. La seconde hypothèse appartient à *Huyghens*, et porte également le nom de son inventeur. On y regarde la lumière comme consistant, de même que le son, en ondulations ou pulsations propagées par un milieu qui remplit tout l'espace : ce milieu, extrêmement élastique, est d'une telle ténuité qu'il n'offre pas de résistance appréciable au mouvement des planètes, des comètes, etc., qui le traversent, et dont il n'affecte aucunement les orbites; on suppose de plus qu'il pénètre tous les corps, mais qu'il s'y trouve dans un état de densité et d'élasticité différent de celui dont il jouit quand il est libre. De là les phénomènes de la réfraction et de la réflexion. On n'a jamais

proposé que ces deux théories *mécaniques*. Cependant on a encore imaginé d'autres systèmes, tels que celui du professeur OErsted, qui, dans un de ses ouvrages, considère la lumière comme une suite d'étincelles électriques, ou comme une série de décompositions et de recompositions d'un fluide électrique qui remplirait l'espace où il se trouverait à l'état d'équilibre ou sans être sollicité par aucune force, etc., etc. Nous nous bornerons à exposer les théories de Newton et d'Huyghens en tant qu'elles se rapportent aux phénomènes que nous avons déjà fait connaître, pour passer de là aux parties plus élevées de l'histoire des propriétés de la lumière, parties que l'on ne peut guère expliquer ni même décrire sans faire usage de quelques considérations hypothétiques.

§ Ier. — *Théorie de Newton, ou système corpusculaire.*

Mouvement d'une particule lumineuse soumise à des forces quelconques. — Cas de la réflexion. — Cas de la réfraction. — Loi des vitesses. — Direction du rayon après avoir été infléchi. — Rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réfraction. — Pouvoir réfringent d'un milieu. — Principe de moindre action. — Solution géométrique du problème du minimum : l'invariabilité du rapport des sinus en est une conséquence. — Avantages du principe de moindre action ; il est applicable à d'autres cas. — Manière générale de l'employer. — Route d'un rayon près des limites d'un milieu réfléchissant ou dirimant. — Mouvement d'un rayon à la surface commune de deux milieux. — D'après Newton, le rayon se compose d'une série de molécules ; leur distance entre elles. — Preuve de leur extrême ténuité. — Réflexion partielle expliquée d'après les principes de Newton. — La réflexion augmente avec l'obliquité ; — l'expérience le prouve. — Réflexion à la surface commune de deux milieux. — Phénomènes résultants de cette réflexion. — Transparence du papier huilé. — Réflexion totale à l'intérieur. — La dernière action exercée par un milieu est attractive. — Expériences sur la réflexion totale. — Iris prismatique produit par la réflexion ; — par la transmission. — Régularité de la réflexion oblique sur des surfaces inégales. — Réfraction régulière au travers de surfaces polies artificiellement. — Intensité des forces qui produisent la réfraction. — Méthode du docteur Wollaston pour déterminer les pouvoirs réfringents.

526. — *Demandes*. 1° La lumière se compose de particules matérielles et inertes douées de forces attractives et ré-

pulsives, et projetées ou émises par tous les corps lumineux avec à peu près la même vitesse (de 200,000 milles par seconde).

2° Ces particules n'ont pas toutes les mêmes forces attractives et répulsives, ni les mêmes rapports avec d'autres corps du monde matériel; elles diffèrent aussi en masse et en inertie.

3° Ces particules stimulent la rétine lorsqu'elles viennent la frapper et produisent la vision. Celles dont l'inertie est la plus grande donnent la sensation du rouge; celles dont l'inertie est la moins grande produisent le violet; les autres donnent les couleurs intermédiaires.

4° Les molécules de la lumière et celles des corps exercent une action mutuelle par laquelle elles s'attirent ou se repoussent suivant une certaine loi exprimée en fonction de la distance qui les sépare. Cette loi peut être telle qu'elle admette de fréquents changements de répulsions en attractions; mais quand cette distance est au-dessous d'une certaine limite peu éloignée, c'est toujours l'attraction qui prévaut jusqu'au moment du contact. Au-delà de cette limite commence une sphère de répulsion. La réflexion de la lumière par les surfaces extérieures des milieux est due aux forces répulsives, tandis que les forces attractives produisent la réfraction et la réflexion à l'intérieur.

5° Ces forces ont des valeurs différentes, non seulement pour les divers corps de la nature, mais encore pour chaque espèce de molécules lumineuses. Elles sont analogues aux affinités chimiques ou aux attractions électives : de là l'inégale réfrangibilité des rayons.

6° Le mouvement de chaque particule de lumière soumise à l'influence de ces forces et de sa propre vitesse est réglé par les mêmes lois dynamiques que les molécules matérielles ordinaires. Chaque particule parcourt donc une trajectoire susceptible d'être calculée exactement, dès que l'on connaît les forces en vertu desquelles elle se trouve décrite.

7° La distance entre les molécules des corps est excessive-

ment petite en comparaison de leur sphère d'attraction et de répulsion par rapport à la lumière.

8° Néanmoins, les forces qui produisent la réflexion et la réfraction sont absolument insensibles à une distance appréciable des molécules dont elles émanent.

9° Chaque particule lumineuse se trouve, durant tout son trajet à travers l'espace, dans une suite de phases périodiques, que Newton appelle *accès de facile réflexion et de facile transmission*, en vertu desquelles elle est disposée à obéir de préférence aux forces répulsives d'un milieu qu'elle vient à rencontrer pendant les phases de la première espèce, ou à céder aux forces attractives pendant les phases de la seconde. On peut attribuer cette propriété à un mouvement de rotation des molécules sur leurs axes, qui leur ferait présenter alternativement leurs pôles d'attraction et de répulsion, ou lui supposer une autre cause. Ces phases sont une des parties les plus curieuses et les plus délicates de la doctrine de Newton : nous en traiterons plus loin avec tous les développements convenables.

527. — Ce sont les hypothèses 7° et 8° qui permettent de calculer mathématiquement la route d'une molécule lumineuse soumise aux forces attractives et répulsives : car il résulte de la huitième que, jusqu'au moment précis où la particule touche la surface d'un milieu quelconque, elle n'est influencée par aucune force appréciable, et par conséquent elle ne peut dévier sensiblement de sa direction en ligne droite. D'un autre côté, dès qu'elle a pénétré au-delà de la surface, parmi les molécules, elle doit être attirée et repoussée également dans tous les sens, en vertu de la septième demande, et conséquemment sa route sera rectiligne comme si elle la poursuivait librement : c'est donc uniquement à cette distance insensible de chaque côté de la surface, qui a pour mesure le diamètre de la sphère d'activité de chaque molécule, que le rayon s'infléchit. La trajectoire peut être considérée alors comme une espèce d'hyperbole dont les branches sont les lignes droites

décrites avant et après l'incidence. Ces branches se confondent avec les asymptotes, et toute la partie curviligne n'occupe qu'un point physique; mais dans les phénomènes de la réflexion et de la réfraction ce n'est point de la nature de cette courbe que nous devons nous occuper : celle-ci dépend nécessairement de l'action corpusculaire, et doit être fort difficile à déterminer. La seule chose qu'il nous importe de connaître, c'est la direction que doit prendre le rayon après son incidence, et le changement qu'éprouve alors sa vitesse, si toutefois elle ne demeure pas invariable.

528. — Considérons d'abord une particule lumineuse qui se meut vers la surface d'un milieu ou qui s'en éloigne, en obéissant aux attractions ou répulsions de toutes les molécules de ce milieu, suivant une loi donnée. En concevant cette surface mathématique comme parfaitement polie, et en regardant comme infini le nombre des molécules qui la composent, il est évident que la résultante de toutes les forces attractives et répulsives qui agissent sur la particule sera dirigée suivant la normale, et d'une intensité insensible à une distance finie de la surface, pourvu que les forces élémentaires de chaque molécule décroissent assez rapidement, à mesure que la distance augmente.

Cela posé, soient x et y les coordonnées de la particule pour un instant donné. Le plan des x, y, est supposé le même que celui de la trajectoire. Ce plan est évidemment celui des forces, et doit être perpendiculaire à la surface du milieu : y est égal à la perpendiculaire abaissée de la particule lumineuse sur la surface, et Y (qui est une certaine fonction de y décroissant avec une grande rapidité) représente la force qui pousse la particule vers la surface, de l'extérieur du milieu à l'intérieur, ou *vice versa*.

D'après les formules de la dynamique, en désignant par dt l'élément du temps, nous aurons pour équations du mouvement

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0\,;\ \frac{d^2 y}{d t^2} + \mathrm{Y} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy, faisant la somme et intégrant, il viendra

$$\frac{d x^2 + d y^2}{d t^2} + 2 \int \mathrm{Y}\ d y = \text{constante}.$$

Or, v étant la vitesse de la particule, on a

$$v^2 = \frac{d x^2 + d y^2}{d t^2}\,;$$

d'où

$$v^2 = \text{constante} - 2 \int \mathrm{Y}\ d y.$$

Comme nous n'avons besoin de considérer que la vitesse finale, c'est-à-dire celle qui reste après l'action du milieu, en dénotant celle-ci par V', et par V la vitesse initiale, nous aurons, en prenant l'intégrale depuis l'origine du mouvement (y_0) jusqu'à la fin (y_1),

$$\mathrm{V}'^2 - \mathrm{V}^2 = - 2 \int \mathrm{Y}\ d y. \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Puisque y_0 et y_1 sont infinis par hypothèse, et que la fonction Y décroît avec une telle rapidité qu'elle est sensiblement nulle pour toute valeur finie de y, il est clair qu'en tous cas on peut prendre $y_0 = + \infty$ pour première limite de l'intégrale. A l'égard de l'autre, il nous faut distinguer deux cas.

529. — Le premier est celui de la réflexion.

Soit avant d'atteindre la surface, soit au moment de l'incidence, soit après avoir pénétré à une certaine profondeur dans le milieu, le rayon est rejeté à l'extérieur par les forces répulsives, et poursuit toute sa route hors du milieu. Si l'on décompose l'intégrale en ses éléments primitifs au moment

où le rayon approche de la surface, ceux-ci peuvent être représentés par

$$\text{etc.} + Y' \times - dy + Y'' \times - dy + Y''' \times - dy + \text{etc.}$$

Mais quand la particule s'éloigne, les valeurs de y augmentent de nouveau par les mêmes degrés qu'elles avaient décru auparavant, et deviennent identiques avec les valeurs précédentes. Les quantités Y', Y'', etc., qui sont les valeurs de Y correspondantes aux valeurs successives de y, restent par conséquent les mêmes, tant pour la forme que pour la grandeur absolue, et les éléments de l'intégrale due à l'éloignement de la particule sont

$$\text{etc.} + Y' \times + dy + Y'' \times + dy + Y''' \times + dy + \text{etc.}:$$

de manière que cette intégrale détruit exactement la première; ce qui donne

$$\int Y\, dy = 0,$$

quand on prend l'intégrale entre les deux extrémités de la trajectoire.

Nous avons donc, dans le cas de la réflexion,

$$V'^2 - V^2 = 0, \quad \text{ou } V' = V.$$

530. — Le second cas est celui où toute la route du rayon, après l'incidence, se fait dans le milieu, c'est-à-dire le cas de la réfraction.

Ici les valeurs de y avant l'incidence sont toutes positives, et toutes négatives après; de plus, le changement de signe de dy, qui caractérise la réflexion, n'a plus lieu dans le cas actuel : ainsi $\int Y\, dy$ doit s'étendre depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$, et sa valeur ne s'évanouira point; mais (en ayant égard au décroissement rapide de la fonction Y) elle aura une valeur finie, qui ne pourra dépendre que des quantités arbitraires qui entrent dans la composition de Y (ou, en d'autres termes, de la nature du milieu et du rayon), et aucunement des

constantes qui déterminent la direction du rayon par rapport à la surface, telles que son inclinaison ou la position du plan d'incidence.

Nous pouvons donc supposer

$$\int Y\, dy = -\tfrac{1}{2} k V^2;$$

k étant une constante, indépendante de la direction du rayon et relative à sa nature et à celle du milieu. Nous aurons ainsi

$$V'^2 = V^2 (1 + k); \quad V' = V . \sqrt{1 + k} = \mu V, \quad \text{(c)}$$

en posant

$$\sqrt{1 + k} = \mu.$$

531. — Nous voyons par là que, dans la réfraction comme dans la réflexion, la vitesse du rayon dévié est la même dans cette hypothèse, quelle que soit la route du rayon avant l'incidence; c'est-à-dire qu'elle est dans un rapport constant avec la vitesse initiale, ce rapport étant celui d'égalité dans le cas de la réflexion.

532. — Considérons maintenant la direction du rayon infléchi. Faisons, à cet effet, θ = l'angle entre sa route et la perpendiculaire à la surface dans un instant quelconque, et $\sin \theta = \frac{dx}{ds}$, et écrivant ds pour $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, élément de l'arc. En intégrant l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0,$$

nous trouvons d'abord

$$\frac{dx}{dt} = \text{constante} = c, \quad \text{et} \quad dx = c\, dt,$$

d'où

$$\sin \theta = \frac{c\, dt}{ds}.$$

Mais $x = \frac{ds}{dt}$: par conséquent $\sin \theta = \frac{c}{v}$. Soient donc θ_o et θ_i les valeurs initiale et finale de θ, c'est-à-dire les angles d'incidence et de réflexion ou de réfraction des éléments rectilignes du rayon, et l'on aura

$$\sin \theta_o = \frac{c}{V} \text{ et } \sin \theta_i = \frac{c}{V'}.$$

En divisant ces deux équations l'une par l'autre,

$$\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_i} = \frac{V'}{V} = \mu.$$

Ce qui signifie que les sinus d'incidence et de réfraction ou de réflexion sont dans un rapport constant, c'est-à-dire en raison inverse des vitesses du rayon avant et après l'incidence.

553. — Cette analyse nous fait voir que l'hypothèse de Newton satisfait aux conditions fondamentales de la réfraction et de la réflexion, sans considérer la nature ou le mode d'action des forces qui produisent ces phénomènes. Il peut y avoir autant d'attractions et de répulsions alternatives que l'on voudra, et le rayon peut éprouver un nombre quelconque d'ondulations avant de quitter le milieu.

Elle ne suppose que le décroissement rapide de la fonction Y, qui exprime la force totale avant que la distance ait atteint une grandeur sensible.

554. — Il résulte aussi de ce qui précède que, V et V' étant les vitesses avant et après l'incidence, et μ l'incidence de réfraction,

$$V' : V :: \mu : 1;$$

ce qui montre que la vitesse du rayon croît en passant d'un milieu plus rare dans un milieu plus dense, et *vice versa*.

535. — D'ailleurs, nous avons

$$k = \frac{V'^2 - V^2}{V^2} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 - 1 = \mu^2 - 1 = \frac{2\int(-Y\,dy)}{V^2}.$$

Si nous supposons maintenant que la *forme* de la fonction Y soit la même pour tous les milieux, et que ces milieux ne diffèrent en pouvoir réfringent qu'en raison 1° de leur densité, qui fait qu'un nombre plus ou moins grand de molécules passent dans la sphère d'activité, 2° de l'affinité ou intensité d'action de chaque molécule, la fonction Y pourra être représentée par $S \cdot n \cdot \varphi(y)$, S étant la pesanteur spécifique ou densité du milieu, n son pouvoir réfringent intrinsèque, et $\varphi(y)$ une fonction absolument indépendante de la nature du milieu, et la même pour tous les corps : de là

$$\int(-Y\,dy) = S \cdot n \cdot \int -\varphi(y)\,dy = S \cdot n \times \text{constante},$$

parce que $\int -\varphi(y)\,dy$, étant prise depuis $y = +\infty$ jusqu'à $y = -\infty$, aura maintenant une valeur numérique constante.

D'après cette remarque,

$$n = \frac{\mu^2 - 1}{S} \times \frac{V^2}{2 \cdot \text{constante}}.$$

Si l'on regarde μ comme l'indice de réfraction d'un certain rayon venant du vide (que l'on aura pris pour terme de comparaison, et dont la vitesse V' dans le vide est supposée connue et par conséquent invariable), n, pouvoir *réfringent intrinsèque* du milieu, sera proportionnel à

$$\frac{(\text{l'indice de réfraction})^2 - 1}{\text{la pesanteur spécifique}}.$$

C'est ainsi que Newton considère le *pouvoir réfringent* d'un milieu comme différant de son *indice* de réfraction. Cette distinction ne repose cependant que sur une pure hypothè-

se, c'est-à-dire que la loi qui règle la force réfringente conserve la même expression pour tous les milieux; ce que nous ignorons complétement.

On trouvera à la fin de ce traité un tableau des pouvoirs réfringents de plusieurs milieux.

536. — L'invariabilité du rapport des sinus d'incidence et de réfraction a été démontrée ici par l'intégration directe des équations fondamentales. Il est cependant une autre méthode de parvenir à cette loi importante, plus longue, il est vrai, dans le cas très simple que nous venons de traiter, mais qui offre plusieurs avantages quand on l'applique aux phénomènes de la double réfraction : c'est pourquoi nous la développerons ici, afin que le lecteur soit familiarisé d'avance avec le principe sur lequel elle se fonde, et avec la manière de l'employer. Cette méthode dépend de ce qu'on appelle en dynamique le *principe de moindre action*, en vertu duquel la somme de tous les éléments de la trajectoire décrite par une molécule en mouvement, multipliés respectivement par la vitesse de cette molécule (ou $\int v\, ds$), est un *minimum* entre deux points fixes de cette trajectoire.

La courbe décrite par une molécule lumineuse peut être considérée comme formée de deux lignes droites, ou de deux branches d'hyperbole qui se confondent avec leurs asymptotes, et d'une partie curviligne renfermée dans un espace infiniment petit, que l'on peut regarder comme un point physique. C'est en ce *point* seulement que le rayon s'infléchit et que la vitesse est variable; sur les deux branches elle est uniforme.

Soient maintenant A et B deux points fixes sur ces branches, que l'on regardera comme les points de départ et d'arrivée du rayon; nommons C le point de la surface où se fait l'inflexion, et posons

$$AC = S, \quad BC = S'.$$

Soient encore σ la portion curviligne infiniment petite de la route du rayon au point C, v la vitesse variable qui a servi

à la décrire, V et V′ les vitesses analogues pour S et S′. L'intégrale $\int v\, d\, s$ pourra se décomposer en trois parties :

$$\int V\, d\, S + \int v\, d\, \sigma + \int V'\, d\, S'.$$

La seconde est sensiblement nulle, à cause de la petitesse infinie de σ. Quant aux deux autres, V et V′ étant constantes, elles deviennent simplement $V\,.\,S + V'\,.\,S'$.

La position de C par rapport à A sera déterminée par la condition

$$V\,.\,S + V'\,.\,S' = \text{minimum},$$

A et B étant supposés fixes, tandis que C est un point encore inconnu de la surface. D'ailleurs, comme nous l'avons démontré aux art. 529 et 530, la vitesse V de la lumière avant l'incidence et V′ après l'incidence sont *toutes deux* indépendantes de la direction du rayon incident et du rayon réfléchi ou réfracté, et de la position du point C. On doit les regarder comme des constantes dans ce problème de minimum, qui se réduit ainsi à une question de pure géométrie :

Étant donnés A et B, trouver sur un plan déterminé un point C, tel que

$$V\,(=\text{constante}) \times \overline{AC} + V'\,(=\text{constante}) \times \overline{BC}$$

soit un minimum. La solution de ce problème est bien facile :

Soient a, b, c, a', b', c', les coordonnées de A et de B; x, y, o, celles de C, en prenant le plan donné pour celui des xy; alors

$$V\,.\,S + V'\,.\,S' = V\,.\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2} + V'\,.\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2 + c'^2}$$

doit être un minimum, en faisant varier séparément x et y; ce qui donne, par la différentiation,

$$\frac{V}{S}[(a-x)dx + (b-y)dy] + \frac{V'}{S'}[(a'-x)dx + (b'-y)dy] = 0.$$

Cette équation devant se vérifier pour des valeurs quelconques de dx et de dy, puisque les variables x et y sont indépendantes l'une de l'autre, on doit avoir séparément

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S}}(a-x)+\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{S}'}(a'-x)=0\,;\quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S}}(b-y)+\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{S}'}(b'-y)=0. \quad (d)$$

Ces équations donnent respectivement

$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}=\frac{-\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\cdot\frac{a'-x}{a-x};\quad \frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}=\frac{-\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\cdot\frac{b'-y}{b-y};$$

d'où

$$(a'-x)(b-y)=(b'-y)(a-x).$$

En effectuant les multiplications et réductions,

$$y=x\cdot\frac{b-b'}{a-a'}+\frac{ab'-ba'}{a-a'},$$

et par conséquent

$$b'-y=\frac{b-b'}{a-a'}\cdot(a'-x).$$

Cette équation signifie que les deux parties S et S′ du rayon, avant et après son incidence sur la surface au point C, se trouvent dans un même plan perpendiculaire à la surface, c'est-à-dire au plan des xy.

338. — Maintenant reprenons les équations (d), en leur donnant la forme

$$\mathrm{S}'(a-x)=\frac{-\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\mathrm{S}(a'-x);\quad \mathrm{S}'(b-y)=\frac{-\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\mathrm{S}(b'-y);$$

il viendra, en faisant la somme de leurs carrés,

$$\mathrm{S}'^2[(a-x)^2+(b-y)^2]=\left(\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\right)^2\cdot[(a'-x)^2+(b'-y)^2]\,\mathrm{S}^2.$$

Nommant θ l'angle entre la partie S et la perpendiculaire

à la surface, c'est-à-dire l'angle d'incidence du rayon, et θ' l'angle entre S' et cette même perpendiculaire, c'est-à-dire l'angle de réfraction, nous aurons

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}}{S}, \text{ et } \sin\theta' = \frac{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2}}{S'};$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\sin\theta = \frac{V'}{V} \cdot \sin\theta' :$$

résultat identique avec celui que nous avions obtenu par l'autre méthode.

539. — Dans la question que nous venons de traiter, le principe de moindre action nous a dispensé d'intégrer les équations différentielles du mouvement de la molécule lumineuse. Son applicabilité dépend, comme nous l'avons vu, de la relation entre V et V', vitesses de la lumière avant et après l'incidence, que nous avons supposées connues. Cette relation a été conclue ici *a priori;* mais, en la regardant simplement comme un fait, comme un résultat de l'expérience, elle n'en était pas moins applicable à la question, et l'on pouvait en déduire également les lois de la réfraction et de la réflexion. Il y aurait eu cependant cette différence essentielle, que, dans ce dernier cas, l'on n'aurait pas dû avoir recours aux équations différentielles, ni entrer par conséquent dans la considération de la nature ou du mode d'action des forces agissant sur la molécule lumineuse. Indépendant de toute hypothèse particulière sur les forces qui produisent l'inflexion du rayon lumineux, si ce n'est que ces forces sont des fonctions de leur distance à leur origine ou centre, le principe de moindre action établit une relation analytique entre les vitesses avant et après l'incidence, et les directions des trajectoires. Cette relation, presque aussi générale que les lois mêmes de la dynamique, n'exprime au fond que la

condition unique rapportée plus haut. Sa forme nous permet d'assigner les routes des deux parties du rayon, pourvu que l'on connaisse le rapport des vitesses, et réciproquement, sans recourir aux équations différentielles. La simplicité de ces équations, dans le cas précédent, a pu faire regarder l'emploi du principe dont il s'agit comme une recherche superflue; mais il n'en est plus de même dans la théorie de la double réfraction. Dans ce cas, on ne connaît ni l'intensité des forces ni leurs directions; et, bien loin de pouvoir *intégrer* les équations du mouvement, on ne peut même les exprimer analytiquement. Le principe de moindre action est la seule base sur laquelle on puisse s'appuyer. C'est par son secours, et par une analyse aussi ingénieuse qu'élégante, que Laplace est parvenu à soumettre au calcul les lois compliquées de la double réfraction.

540. — Supposons, en effet, que les vitesses des deux parties du rayon, au lieu d'être les mêmes dans toutes les directions, varient avec les positions de ces parties par rapport à la surface du milieu ou à quelques lignes fixes ou axes dans l'espace : alors V et V', au lieu de rester invariables, seront représentées par des fonctions des trois coordonnées du point C, rectangulaires comme x, y, z, ou polaires comme φ, θ et γ, et les parties S et S' du rayon intercepté entre A, B et la surface C, seront pareillement des fonctions de ces coordonnées. De manière que la condition

$$V\,S + V'\,S' = \text{minimum}$$

donnera par la différentiation, et en posant la différentielle égale à zéro, une équation de la forme

$$L\,dx + M\,dy + N\,dz = 0$$

ou

$$L\,d\varphi + M\,d\theta + N\,d\gamma = 0,$$

suivant l'espèce des coordonnées. L'équation de la surface,

étant aussi différentiée, fournit une relation du même genre; et ces conditions étant les seules auxquelles les différentielles dx, dy, dz, soient soumises, on pourra en éliminer une, et égaler séparément à zéro les coëfficients des deux autres. Nous obtiendrons ainsi, entre les coordonnées, deux équations qui suffiront pour les déterminer, en y joignant celle de la surface; ce qui fixera la position du point C, où le rayon A C doit rencontrer la surface, et se diriger vers B après son inflexion par le milieu. Le problème de la réflexion ou de la réfraction sera donc résolu dans toute sa généralité dès que l'on connaîtra la nature des fonctions V et V'.

541. — Considérons un peu plus en détail ce qui arrive au rayon près de la surface du milieu. Nous pouvons supposer qu'en cet endroit le milieu se compose d'une série de lames ou couches infiniment minces, où les forces attractives et répulsives des molécules du milieu dominent alternativement. Le nombre de ces couches peut être indéfini, et chacune peut être considérée comme extérieure à celles qui la suivent. C'est leur assemblage que l'on peut regarder comme la *surface* du milieu.

Soit Aa (fig. 119) un rayon qui se dirige vers cette surface : sa route sera rectiligne jusqu'en a, où il commence à éprouver l'action du milieu. Si la première couche dans laquelle il entre est une couche attractive, sa route s'infléchira comme ab, en prenant la forme d'une courbe concave du côté de la surface C, et sa vitesse croîtra dans la direction perpendiculaire à la surface. Arrivé en b, la force devenant répulsive, la trajectoire aura en b un point d'inflexion, et la partie bc dans cette couche aura sa convexité tournée vers la surface; la vitesse dans le sens de la perpendiculaire diminuera pendant ce trajet; et ainsi de suite pour un nombre quelconque de couches.

Supposons maintenant qu'en traversant une lame répulsive comme C, la répulsion soit assez forte, ou la vitesse qui portait le rayon vers la surface, assez faible, pour que cette

vitesse soit totalement anéantie : le rayon se mouvra alors, pour un moment, dans une direction parallèle à la surface en C; mais la répulsion continuant toujours, il sera forcé de retourner; et les forces étant toutes égales à ce qu'elles étaient auparavant, mais agissant en sens contraire par rapport au mouvement de la molécule, celle-ci décrira la branche C d' c' b' a' B égale à la première, de l'autre côté de C. Tel est le cas de la réflexion. Mais en supposant, comme dans la figure 120, que le rayon ait une vitesse initiale assez grande, ou que les forces répulsives soient assez faibles, par rapport à celles d'attraction, pour qu'il puisse traverser les couches et entrer dans la région où les forces qui sollicitent les molécules sont en équilibre, avant que sa vitesse dans le sens perpendiculaire à la surface soit détruite, sa route sera rectiligne et toute dans le milieu : c'est le cas de la réfraction. Dans les deux cas nous ne connaissons que la route qu'il prend en dernier lieu, c'est-à-dire la direction des branches asymptotiques a' B ou e B. Le nombre des ondulations qu'il éprouve entre a et a' ou e nous est tout-à-fait inconnu.

542. — Le même raisonnement peut s'appliquer au mouvement d'une molécule lumineuse près de la surface de deux milieux comme près de la surface qui sépare un milieu du vide. Si l'on suppose les molécules matérielles *uniformément distribuées*, et *agissant également dans toutes les directions autour d'elles*, la résultante de toutes leurs forces, par rapport à la molécule lumineuse, doit être perpendiculaire à la surface commune : c'est aussi la condition qu'exige la théorie précédente.

543. — Dans la doctrine corpusculaire, le rayon lumineux est regardé comme une série continue de molécules qui se meuvent toutes en ligne droite avec la même vitesse, et qui sont assez rapprochées pour tenir la rétine dans un état d'excitation constante, c'est-à-dire pour que l'impression produite par la première ne soit pas effacée avant l'arrivée de la se-

conde. L'expérience nous apprend que, pour produire une sensation continue, il suffit de répéter un éclat de lumière huit ou dix fois par seconde. Si l'on fait tourner un charbon ardent de manière à décrire un cercle, et que la vitesse de rotation surpasse huit ou dix circonférences par seconde, l'œil ne pourra plus distinguer la place du charbon à chaque instant, et l'on verra un cercle entier d'un éclat uniforme : ce qui prouve à l'évidence que la sensation produite par la lumière qui tombe sur un point de la rétine reste, presque sans s'affaiblir, jusqu'à ce que l'impression se répète par une nouvelle révolution du luminaire.

Maintenant, si l'on peut obtenir une vision non interrompue par des impressions instantanées, à des intervalles aussi grands qu'un dixième de seconde, l'on conçoit aisément qu'il n'est pas nécessaire que toutes les molécules d'un rayon se suivent à intervalles égaux pour que nos organes éprouvent une sensation continue de lumière. Comme la vitesse de la lumière est d'environ 200,000 milles par seconde, 200 de ces molécules par seconde frapperaient constamment notre rétine, quand même elles se trouveraient séparées l'une de l'autre par des intervalles de 1,000 milles.

Cette observation lève toute difficulté à l'égard de la régularité de leur mouvement dans l'espace, et explique en même temps comment une infinité de rayons peuvent se croiser sans confusion en un même point, surtout si l'on considère l'excessive ténuité qu'il faut leur supposer pour qu'ils n'offensent point nos organes, malgré leur extrême vitesse.

Si une molécule de lumière pesait un seul grain, son effet serait égal à celui d'un boulet de canon de plus de 150 livres, animé d'une vitesse de 1,000 pieds par seconde. Quelle doit donc être cette ténuité si des milliards de molécules rencontrées par des lentilles ou des miroirs n'ont jamais pu communiquer le moindre mouvement aux appareils les plus délicats, imaginés exprès pour ces expériences? (Voyez, dans les *Trans. philos.* de 1792, vol. LXXXII, page 87, les expériences de M. Bennet.)

544. — Quand un rayon de lumière tombe sur une surface réfractante ou réfléchissante, puisque ses molécules se meuvent toutes avec la même vitesse et dans la même direction, il paraît que toutes doivent éprouver les mêmes effets; que, si la première est réfléchie, il en sera de même des autres, et que, si au contraire l'une d'elles pénètre dans le milieu, elles doivent y pénétrer toutes.

Cependant l'expérience nous prouve le contraire; et, chaque fois qu'un rayon tombe sur la surface extérieure d'un milieu, une partie seulement est réfractée et l'autre est réfléchie. Aucune théorie ne peut être regardée comme satisfaisante si elle ne rend compte d'un fait si important. La doctrine de Newton l'explique par les accès de facile réflexion et de facile transmission. Pour s'en rendre compte, il faut avoir recours à la neuvième demande (art. 526), et supposer que deux molécules arrivent en même temps à la surface sous la même incidence, l'une dans un accès de facile réflexion et l'autre dans un accès de facile transmission. La première sera alors sous l'influence des forces répulsives du milieu, tandis que la seconde cédera aux forces attractives : il est donc évident qu'avec des circonstances égales, sous le même angle d'incidence, etc., l'une sera réfléchie et l'autre réfractée.

Cette différence tiendra uniquement à la nature du milieu, et à la vitesse initiale de la molécule au moment où elle entre dans le milieu; vitesse proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence.

Si le concours de toutes les forces répulsives, agissant avec leur plus grande énergie, est nécessaire pour détruire cette vitesse et produire la réflexion, il n'y aura que les molécules qui se trouveront dans la *disposition la plus favorable*, ou dans la phase la plus intense d'accès de facile réflexion, qui seront réfléchies. Dans le cas où il suffit d'une partie des forces répulsives, les molécules qui arriveront dans des dispositions moins favorables ou dans des *phases moins intenses* pourront aussi être réfléchies; et même, si les forces répul-

sives du milieu sont très intenses, ou si l'obliquité est assez grande pour que la vitesse dans le sens perpendiculaire à la surface soit très petite, les molécules qui arriveront dans les phases d'accès de facile transmission les moins énergiques n'auront jamais la force nécessaire pour traverser les couches répulsives.

545. — Nous voyons par là que le nombre plus ou moins grand des molécules lumineuses qui seront réfléchies à la surface d'un milieu, dans une phase d'accès quelconque, dépendra de la nature de ce milieu. Si le rayon tombe sur la surface commune de deux milieux, ce nombre dépendra de la nature de tous les deux; il variera aussi avec l'angle d'incidence. Pour de grandes obliquités, la réflexion sera considérable; cependant, même sous l'obliquité la plus grande, quand le rayon incident ne fait qu'effleurer la surface, on ne doit pas en conclure que chaque molécule, ou même la plus grande partie, *doit* être réfléchie. Dans leurs phases les plus favorables d'accès de facile transmission, les molécules obéiront aux forces attractives plutôt qu'aux forces répulsives; mais c'est la nature seule du milieu qui fera prévaloir les unes ou les autres. Suivant la doctrine de Newton, les accès *disposent* les molécules à la réflexion ou à la transmission, exaltent les forces qui tendent à produire l'une, et dépriment celles qui agissent en faveur de l'autre; mais ils ne déterminent jamais la réflexion ou la transmission sans le concours de circonstances favorables.

546. — L'expérience vérifie ces conclusions.

L'on observe que la réflexion à la surface de quelques milieux transparents croît sensiblement avec l'angle d'incidence; mais à la surface extérieure d'un milieu quelconque elle n'est jamais totale ou presque totale. Pour le verre, par exemple, quoique sous de très grandes obliquités, une grande partie de la lumière entre dans le milieu en se réfractant. Pour des milieux opaques, comme les métaux polis, on observe la

même chose; la réflexion devient seulement plus vive avec l'accroissement de l'angle d'incidence. La seule différence, dans ce cas, c'est que la lumière qui traverse la surface s'éteint au même instant.

547. — Les phénomènes qui ont lieu lorsque la lumière est réfléchie par la surface commune de deux milieux sont tels que l'on doit s'y attendre, d'après la théorie que nous venons d'exposer; à quelques circonstances près, qui nous amèneront à limiter la généralité de nos hypothèses, et à établir une relation entre les forces attractives et répulsives, auxquelles nous avons rapporté la réflexion et la réfraction. Quand deux milieux se trouvent dans un contact parfait, comme un fluide avec un solide, ou deux fluides entre eux, l'intensité de la réflexion est toujours d'autant plus faible à leur surface commune, que les indices de réfraction de ces milieux approchent davantage de l'égalité; et, quand ils sont exactement égaux, la réflexion cesse, et le rayon poursuit sa route dans le second milieu sans changer ni de direction, ni de vitesse, ni d'intensité. Ce fait, qui s'observe généralement, prouve à l'évidence que les forces attractives et répulsives suivent exactement les mêmes lois dans les milieux doués d'un même pouvoir réfringent, et sont entre elles dans le même rapport; que, dans les milieux inégalement réfringents, la relation entre les forces qui produisent la réflexion et la réfraction n'est pas arbitraire; mais que l'une dépend de l'autre, et croît ou décroît avec elle.

Cette circonstance remarquable rend moins improbable la supposition faite, à l'art. 535, de l'invariabilité de forme de la fonction Y ou $\varphi(y)$, qui exprime la loi de l'action exercée par les molécules de tous les corps sur la lumière.

548. — Pour démontrer par l'expérience les phénomènes en question, prenons un prisme de verre dont l'angle de réfringence soit très petit (d'un demi-degré, par exemple); on peut se servir d'un morceau de verre plan, parce que rare-

ment les deux faces sont parallèles. L'ayant placé près de l'œil, dans une position convenable, on regardera l'image d'une chandelle réfléchie par la surface voisine de l'œil : on verra cette image accompagnée d'une autre image à côté, due à la réflexion par l'autre face à travers la lame, et les deux images auront à peu près le même éclat, si l'angle d'incidence n'est pas trop grand. Si l'on met alors un peu d'eau, ou le doigt mouillé, ou mieux, un corps noir mouillé, derrière la face postérieure, à l'endroit où se fait la réflexion interne, la seconde image perdra sur-le-champ la plus grande partie de sa clarté. Si, au lieu d'eau, l'on se sert d'huile d'olive, la perte de la lumière sera beaucoup plus forte; et, si c'est de la poix amollie par la chaleur que l'on applique derrière le verre, de manière à la faire adhérer parfaitement, la seconde image sera tout-à-fait effacée; mais elle reparaîtra si l'on emploie des substances plus réfringentes que le verre. Ainsi l'huile de casse rendra l'image très brillante; le soufre lui donnera un éclat égal à celui de la première image; et, si l'on emploie le mercure ou l'amalgame (comme dans le miroir ordinaire), la réflexion à la surface commune du métal et du verre sera beaucoup plus vive que si elle n'était due qu'au verre seul.

549. — L'anéantissement de la réflexion à la surface commune de deux milieux d'égal pouvoir réfringent explique une multitude de phénomènes curieux. Si l'on plonge un morceau irrégulier de quelque substance diaphane, de crown-glass, par exemple, dans un milieu incolore de même pouvoir réfringent, ce morceau disparaît entièrement. En effet, un corps n'étant visible que par les rayons qu'il réfléchit, on doit cesser de le voir aussitôt que l'on détruit la réflexion, à moins qu'il n'y ait quelques parties opaques dans son intérieur, ce que nous ne supposons pas ici. Ainsi, telle substance réduite en poudre présente l'aspect d'une masse blanche et opaque, à cause des réflexions intérieures et extérieures produites par les surfaces des particules qui la com-

posent ; mais si l'on détrempe cette poudre dans un liquide de même pouvoir réfringent, elle deviendra d'une transparence parfaite : tel est le papier mouillé, ou plutôt huilé. Le papier se compose d'une infinité de fibres ligneuses plus ou moins transparentes, dont le pouvoir réfringent est sans doute à peu près le même que celui des huiles les plus réfringentes; sa blancheur est due aux rayons qui se confondent en se réfléchissant sous tous les angles possibles, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, car le rayon qui n'est pas réfléchi par une fibre l'est par la fibre voisine. En humectant une feuille de papier avec un liquide quelconque, l'intensité de ces réflexions s'affaiblit d'autant plus que le pouvoir réfringent du liquide approche davantage de celui du papier : de manière qu'un nombre considérable de rayons part d'un côté de la feuille et sort par la face opposée.

La transparence qu'acquiert l'hydrophane lorsqu'on la plonge dans l'eau est due sans doute à la même cause : l'eau, venant à remplir les pores, diminue les réflexions intérieures. Dans un mémoire intéressant sur le *tabasheer* (concrétion siliceuse que l'on trouve dans la canne à sucre, et le plus réfringent de tous les solides), le docteur Brewster a expliqué, d'après le principe énoncé plus haut, plusieurs phénomènes extraordinaires que l'on observe lorsqu'on mouille cette substance avec différents liquides. (*Transact. philos.*, 1819.)

550. — Le raisonnement de l'art. 529 est également applicable aux deux cas où le rayon est réfléchi, soit par la surface intérieure d'un milieu placé dans l'air, soit par la surface extérieure.

La seule différence, c'est que, dans le dernier cas, la réflexion se fait par les forces répulsives, tandis que, dans l'autre, elle a lieu par attraction.

La route d'un rayon réfléchi à l'intérieur peut se concevoir telle que la représentent les fig. 121 et 122, et la réflexion peut se faire dans l'une quelconque des régions ou

couches attractives, au-dessus ou au-dessous de la véritable surface, c'est-à-dire de la dernière couche de molécules. Il y a cependant un cas de réflexion intérieure trop remarquable pour ne pas en faire une mention particulière : c'est celui où l'angle d'incidence excède *l'angle-limite*, dont le sinus est $\frac{1}{\mu}$ (art. 183 et suiv.).

La réflexion intérieure est *totale* alors, comme nous l'avions déjà dit en donnant ce phénomène comme un résultat de l'expérience. Pour l'expliquer, considérons un rayon qui tombe sous un angle précisément égal à l'angle-limite, et dans la phase la plus intense de son accès de facile transmission : alors il sera réfracté; et, puisque l'angle de réfraction doit être de 90° (à cause de la généralité du raisonnement employé pour démontrer la loi de réfraction à l'art. 529), il émergera en effleurant la surface à la limite extrême CB (fig. 123), où cesse toute action sensible. Dans ces circonstances, sa vitesse initiale dans le sens perpendiculaire à la surface suffit à peine pour l'élever jusqu'à cette limite, où elle devient tout-à-fait nulle.

Supposons maintenant un autre rayon aussi dans la phase la plus intense de son accès de facile transmission, mais dont l'incidence est plus oblique, quoique d'une quantité infiniment petite : puisque sa vitesse initiale suivant la normale est moindre que celle du premier rayon, cette vitesse sera détruite avant qu'il n'ait atteint la limite en question, et il commencera à se diriger parallèlement à la surface du milieu, *en-deçà* de la dernière limite de la sphère d'action de cette même surface.

551. — La dernière action exercée par la surface, ou la force qui s'étend à la plus grande distance, ne peut être qu'attractive : en effet, si elle était répulsive, il est évident qu'aucun rayon extérieur, tombant sous un très grand angle d'incidence (c'est-à-dire sous un angle qui approcherait indéfiniment de 90°), ne pourrait échapper à la réflexion.

D'ailleurs, dans cette hypothèse, aucun rayon ne pourrait émerger de l'intérieur d'un milieu, que sous une obliquité à la surface plus grande qu'un certain angle constant, la dernière action du milieu étant, dans ce cas, de rejeter le rayon *à l'extérieur,* en le rapprochant de la perpendiculaire.

Or ces conséquences sont contraires à ce que nous apprend l'observation.

Nous pouvons encore envisager la question de la manière suivante :

Puisque tout rayon venant de l'intérieur ne peut émerger qu'en devenant parallèle à la surface, lorsque son angle d'incidence est égal à l'angle-limite, et puisque tout point de la courbe qu'il décrit avant son émergence est plus près du milieu que la ligne de dernière direction, il est géométriquement impossible que la courbe immédiatement adjacente au point d'émergence ne tourne pas sa *concavité* vers le milieu, qui doit par conséquent attirer le rayon.

552. — Ainsi la molécule lumineuse dont nous discutons le mouvement se trouvera dans la région attractive au moment où sa vitesse suivant la normale à la surface sera détruite : elle se dirigera donc vers l'intérieur, comme le représente la ligne pointillée, fig. 122, et se réfléchira. A plus forte raison, toutes les molécules incidentes qui se trouveront dans une phase moins intense d'accès de facile transmission, ou dans un accès de facile réflexion, aussi-bien que celles qui tomberont sous un angle d'incidence encore plus grand, c'est-à-dire avec une vitesse perpendiculaire moindre, devront également être réfléchies. Dans les circonstances les plus favorables à la transmission, elles atteindront la région attractive extérieure, comme dans la fig. 123; autrement elles seront réfléchies par des couches moins éloignées (fig. 122). Si l'obliquité de leur direction primitive était très grande, ou qu'elles se trouvassent dans les phases les plus intenses de facile réflexion, leurs routes seraient semblables à celle que représente la fig. 121.

553. — La conclusion à laquelle nous sommes parvenus dans l'article précédent, que l'attraction d'un milieu sur les molécules de la lumière s'étend à une plus grande distance que la répulsion, est, comme nous venons de le voir, une conséquence rigoureuse des principes de la dynamique : loin d'être contraire au système de Newton sur la réflexion, elle y est parfaitement conforme.

Le docteur Brewster a été conduit au même résultat par des considérations particulières déduites de ses expériences sur la loi de polarisation (*Trans. philos.*, 1815, p. 133), et s'en est servi pour expliquer un fait curieux, observé par Bouguer, savoir, que l'eau, quoique moins réfléchissante que le verre sous de petites incidences, l'est beaucoup davantage sous des incidences plus grandes, par exemple de 87° ½. En supposant que la lumière ait, dans les deux cas, subi toute l'action des forces réfringentes avant de se réfléchir, son incidence au moment où elle atteindra la région des forces répulsives aura été réduite, dans le cas du verre, à 57° 44', et, dans celui de l'eau, à 61° 5' seulement : étant plus oblique à la surface de l'eau, elle sera réfléchie en plus grande quantité.

Cette explication paraîtra plus ou moins plausible; mais elle est sans doute fort ingénieuse, et le phénomène n'en est pas moins digne de toute notre attention.

554. — Pour observer plus commodément les phénomènes de la réflexion totale, on place contre une fenêtre, comme dans la fig. 124, un prisme de verre (dont l'angle réfringent est droit), de manière que sa base soit horizontale et repose sur une substance noire; puis on regarde par en bas, en mettant l'œil tout près de l'une des faces : la base paraîtra divisée en deux parties par un bel arc coloré, comme un arc-en-ciel, dont la concavité sera tournée du côté de l'œil. La première partie, du côté de la fenêtre, sera extrêmement brillante, et réfléchira tous les objets extérieurs de manière à produire une illusion parfaite; tandis que l'autre paraîtra

sombre en comparaison, parce que la réflexion des nuages, etc., sera beaucoup moins vive.

Si l'on tient le prisme à la main, au lieu de le poser sur un corps noir, et qu'on tienne une chandelle par-dessous, cette chandelle sera visible; mais on la verra toujours dans la concavité de l'arc, quelle que soit sa position. La fig. 124 représente la route du rayon dans cette expérience : E est l'œil; N G, O F, P D, sont des rayons incidents sur la face opposée, et formant avec la base des angles différents; ils se réfléchissent vers l'œil E, par rapport auquel O F a justement une incidence égale à l'angle-limite. Il est évident que tous les rayons du côté de N, tombant sur la base au-delà de F, seront trop obliques pour être transmis, et se réfléchiront entièrement; ceux, au contraire, qui tomberont entre F et A, n'ayant point le degré d'obliquité nécessaire pour que la réflexion soit totale, ne seront réfléchis qu'en partie, et le reste traversera la base dans la direction de D Q. Maintenant, pour qu'un rayon émis par un luminaire placé en un point quelconque L au-dessous de la base puisse atteindre l'œil, il faut nécessairement que ce rayon tombe entre A et F comme L D. Jamais il ne pourrait être réfracté vers E si le point d'incidence se trouvait entre B et F.

555. — L'arc coloré qui sépare la région de réflexion totale de celle de réflexion partielle peut s'expliquer de la manière suivante :

Supposons, pour plus de simplicité, que l'œil soit plongé dans le milieu, afin d'éviter de tenir compte de la réflexion sur la surface inclinée A C du prisme, et ne considérons d'abord que les rayons rouges extrêmes; abaissons de l'œil une perpendiculaire sur la base du prisme, et regardons-la comme l'axe d'un cône lumineux dont la génératrice ferait avec cet axe un angle dont le sinus $=\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire l'angle-limite pour les rayons rouges extrêmes. En considérant ce cône comme émané de l'œil, tous les rayons qui le compo-

sent seront réfléchis totalement, s'ils tombent hors du cercle qui lui sert de base; mais ceux qui tomberont dans l'intérieur ne subiront qu'une réflexion partielle. Si tous les rayons étaient doués de la même réfrangibilité, le lieu de réflexion partielle serait donc un cercle dont le rayon égalerait le produit de la hauteur de l'œil au-dessus de la base par la tangente de l'angle dont le sinus est $\frac{1}{\mu}$, c'est-à-dire $\frac{H}{\sqrt{\mu^2-1}}$. On aurait également pour le lieu de réflexion partielle des rayons violets un cercle dont le rayon serait

$$\frac{H}{\sqrt{\mu'^2-1}}=\frac{H}{\sqrt{(\mu+\delta\mu)^2-1}},$$

valeur moindre que la précédente. Ainsi, dans l'espace entre les deux cercles, les rayons rouges seront réfléchis en partie et les rayons violets en totalité; ce qui donnera à cet espace une teinte violette. Le même raisonnement peut s'appliquer aux rayons intermédiaires; et la transition de l'espace lumineux extérieur aux cercles, à l'espace sombre qui forme leur intérieur, se fera par la soustraction successive du rouge, de l'orangé, etc.; ce qui rendra la lumière restante de moins en moins blanche, jusqu'à ce qu'elle passe au bleu. Si l'on suppose maintenant que les rayons tombent en sens contraire, c'est-à-dire qu'au lieu d'émaner de l'œil, ils sont réfléchis vers lui, tout se passera de la même manière, et l'œil verra l'espace lumineux hors du cercle, séparé de la surface intérieure par une circonférence bleue, dont la couleur augmente de vivacité en approchant du centre. Tel est effectivement le phénomène que l'on observe, à cette différence près que l'arc paraît un peu rougeâtre à sa convexité.

Cette apparence, incompatible avec la théorie, pourrait bien n'être due qu'au contraste, source féconde d'illusion dans tout ce qui concerne les couleurs : elle en serait alors un des exemples les plus curieux et les plus remarquables.

Newton (*Optique*, 2e partie, expér. 16) ne parle pas de

cette particularité, observée et décrite pour la première fois par sir W. Herschel, quoiqu'il explique le phénomène général de la même manière que nous. La réfraction du côté BA du prisme modifie légèrement la figure de l'arc, et tend à lui donner celle d'une conchoïde, lorsque les rayons émergents sont très obliques.

556. — Si l'on couvre d'un papier noir la face BC du prisme, et que l'on fasse tomber une vive lumière venant d'un point au-dessous de BA, qui se répande sur la base en se disséminant (comme la lumière qui traverserait un verre usé à l'émeri, dont la face dépolie serait en contact avec la base du prisme), l'on observera des phénomènes tout opposés : l'espace noir sera au-delà et l'espace lumineux en-deçà du point F. La séparation sera marquée par un bel arc rouge, qui passera successivement à l'orangé, au jaune, etc., jusqu'au blanc, qui occupera la partie concave. Il est évident que ce phénomène est le complément de celui que nous avons décrit en dernier lieu, quand l'arc bleu était vu par réflexion : une explication particulière serait donc superflue. Il est à remarquer, cependant, que l'on n'observe à sa concavité aucune trace de bleu ou de violet; de manière que l'effet que nous avons attribué au contraste, en parlant de l'arc vu par réflexion, n'a rien qui lui corresponde dans l'arc vu par transmission.

557. — L'intensité et la régularité de la réflexion à la surface extérieure d'un milieu dépendent non seulement de la nature de ce milieu, mais encore du degré d'égalité et de poli de sa surface. Mais on peut demander, avec raison, comment il se fait une réflexion régulière à la surface d'un corps que l'art a poli, tandis que le procédé de la polissure n'a d'autre effet que de diminuer les aspérités par le frottement de certaines poudres dures, qui, malgré la petitesse que leur a donnée la division mécanique, n'en sont pas moins des

masses énormes en comparaison des dernières molécules de la matière : leur action se borne à enlever le sommet des inégalités de la surface ; de manière que réellement une surface polie doit avoir avec la surface d'un liquide ou d'un cristal à peu près la même ressemblance qu'un champ labouré avec le miroir poli très soigneusement.

Mais la doctrine de Newton répond victorieusement à cette objection. Si la réflexion se faisait par le contact de la lumière avec les molécules de la surface, jamais elle ne serait régulière : en effet, comment assigner alors la direction du rayon réfléchi, puisqu'elle dépendrait entièrement de la forme de ces molécules ou aspérités, et de l'inclinaison de leurs surfaces par rapport à la surface du milieu considérée dans toute son étendue ? Les données variant à l'infini pour tous les corps non cristallisés, la lumière devrait se disséminer dans tous les sens.

D'une autre part, dans les cristaux, chaque molécule ne présentant qu'un nombre limité de surfaces rigoureusement planes, et les faces correspondantes étant toutes mathématiquement parallèles, la réflexion serait régulière, à la vérité ; mais sa direction dépendrait uniquement de celle du rayon incident et de certaines lignes fixes dans le cristal, sans que l'inclinaison et le poli naturel ou artificiel des surfaces eussent sur elle la moindre influence. D'ailleurs il arriverait, le plus souvent, que le faisceau réfléchi serait multiple au lieu d'être simple. Toutes ces conséquences sont tellement contraires à l'expérience, qu'il faut nécessairement supposer que les forces qui produisent la réflexion étendent leur action à des distances non seulement égales aux intervalles entre les molécules, mais plus grandes même que la largeur des sillons entre les petites aspérités superficielles des milieux polis par la main de l'homme. Ceci accordé, toute difficulté s'évanouit : car l'action commune de plusieurs inégalités et de plusieurs creux peut être parfaitement uniforme, tandis que les actions individuelles offrent la plus grande diversité.

C'est ce qu'on voit clairement si l'on jette un coup-d'œil sur la fig. 125, où AB représente la surface raboteuse d'un milieu, et AC le rayon d'une sphère attractive, ou la répulsion de la molécule A. Concevons maintenant que tous les sommets des élévations a, b, c, d, se trouvent dans un même plan, et que AC soit le rayon des sphères qui ont ces sommets pour centres ; les intersections de ces sphères entre elles engendreront une espèce de surface mamelonnée, $\alpha\beta\gamma\delta$, qui approchera extrêmement d'un plan géométrique, infiniment plus, du moins, que la surface AB, si les distances entre les centres sont très petites par rapport aux rayons. Ainsi un rayon dirigé vers un milieu ne tombera pas sur une surface inégale lorsqu'il aura atteint la sphère d'action de ce milieu, mais sur un plan presque parfait. En supposant que les molécules agissantes soient répandues uniformément sur AB, la résultante de leurs actions partielles sera perpendiculaire à cette surface. Le même raisonnement peut s'appliquer aux couches de molécules, quoique discontinues, au-dessous de a, b, c, d, etc., et en général à toutes les couches qui forment la surface.

Ainsi les conditions principales sur lesquelles repose la théorie newtonienne de la réflexion et de la réfraction (c'est-à-dire l'égalité des forces à des distances égales du niveau général de la surface, et la perpendicularité de leurs directions par rapport à ce même niveau) se trouvent entièrement remplies.

558. — Il est évident que les inégalités de la surface mamelonnée que nous venons de décrire deviendront d'autant plus sensibles que les rayons des sphères seront plus petits, ou que les intervalles entre les centres seront plus considérables : on conçoit qu'alors la régularité de la réflexion et de la réfraction sera altérée proportionnellement. Il s'ensuit aussi que, plus l'incidence du rayon est oblique, moins la surface doit être polie pour réfléchir régulièrement : c'est ce que l'expérience confirme tous les jours. Il est aisé de trouver

un morceau de verre, usé à l'émeri, qui donne une image assez distincte quand les rayons sont très obliques, quoiqu'il n'en donne aucune quand ils sont perpendiculaires. En voici les raisons : d'abord un rayon très oblique n'a pas besoin de pénétrer à une très grande profondeur dans la sphère de répulsion pour perdre sa vitesse suivant la perpendiculaire à la surface. En second lieu, il ne saurait passer entre deux élévations ou entre deux enfoncements contigus de la surface fictive $\alpha \beta \gamma \delta$; mais, à cause de son obliquité, il doit en traverser plusieurs et subir l'action du milieu avec plus de régularité.

559. — C'est ainsi que l'on explique le phénomène de la réflexion dans le système de Newton.

Mais on peut demander encore comment une surface polie par l'art peut donner une réfraction régulière. Quand le rayon se réfléchit, il n'atteint jamais les aspérités de la surface, et n'est soumis qu'à leur action moyenne, rendue uniforme par la distance et par des compensations particulières. Dans la réfraction, au contraire, le rayon doit traverser la surface même et toutes ses inégalités, sous tous les angles possibles. La réponse est également simple : ni la réfraction ni la réflexion ne peuvent avoir lieu en totalité ni en grande partie à la surface même; mais le rayon s'infléchit (vers l'intérieur ou l'extérieur) à une distance assez grande pour le soustraire à l'influence de ces inégalités; ce n'est pas la surface seule, mais une couche du milieu beaucoup plus épaisse qui agit sur lui. On peut comparer l'effet des aspérités à celui des montagnes de la terre, qui altèrent pareillement la pesanteur. Une pierre qui tombe d'une hauteur médiocre, très près de l'une d'elles, ne suivra pas la direction de la verticale, mais celle du fil à plomb, qui en diffère sensiblement. Cependant, si elle tombait de la lune vers le centre de la terre, elle n'éprouverait aucune perturbation sensible de la part des montagnes près desquelles elle passerait, quand bien même celles-ci seraient mille fois plus grosses.

560. — Cependant des surfaces sensiblement inégales ne peuvent donner de réfraction d'une régularité comparable à celle de la réflexion; ce qu'on peut attribuer à l'impossibilité qu'un rayon pénètre la surface, quand il se réfracte sous une assez grande obliquité. Il est à remarquer que la réflexion régulière à l'intérieur d'un milieu qui offre une surface raboteuse est à peine sensible, même quand les rayons sont très obliques et que la réflexion à l'extérieur est abondante et régulière; ce qui semble indiquer que les forces répulsives exercent toute leur énergie hors du milieu.

561. — Quelles que soient les forces en vertu desquelles les corps réfléchissent et réfractent la lumière, ce qu'il y a de certain, c'est qu'elles doivent surpasser de beaucoup l'intensité de la pesanteur.

L'attraction de la terre sur une particule près de sa surface ne lui fait parcourir qu'environ 16 pieds par seconde. Ainsi cette force ne saurait infléchir sensiblement une molécule qui se mouvrait avec la vitesse de la lumière. En effet, le temps que dure l'action totale du milieu n'est que celui que la lumière met à traverser le diamètre de la sphère d'action sensible des molécules de la surface. Donnons à ce diamètre une valeur d'un millième de pouce; ce qui excède toute probabilité : cet espace sera traversé par la lumière en $\frac{1}{12,672,000,000,000}$ de seconde. Supposons maintenant que la déviation produite par le milieu soit de 30° (ce qui arrive fréquemment), et qu'elle soit due à une force uniforme agissant pendant une seconde entière : puisque cette force doit produire une inflexion équivalente à 200,000 milles $\times$ sin 30° $=$ 100,000 milles $=$ 33,000,000 $\times$ 16 pieds, elle doit valoir plus de 33 millions de fois celle de la gravité à la surface de la terre. Encore cet effet n'a-t-il pas lieu pendant une seconde, mais pendant la fraction de seconde donnée plus haut; ce qui exige que l'intensité de la force en question soit augmentée dans le rapport du carré d'une seconde au carré de cette

fraction. Ainsi l'hypothèse la moins improbable donnerait pour résultat une force moyenne qui vaudrait

$$4,969,126,272 \times 10^{24} \text{ fois celle de la pesanteur.}$$

Cette force énorme va s'accroître encore si l'on considère que la gravité à la surface de la terre résulte de l'attraction de toute sa masse, tandis que la force qui fait dévier la lumière n'est due qu'aux molécules qui la touchent immédiatement dans la sphère d'attraction. Or une sphère d'un millième de pouce de diamètre et d'une densité égale à la densité moyenne de la terre n'exercerait qu'une force de gravitation égale à

$$\frac{\text{un millième de la gravité ordinaire}}{\text{le diamètre de la terre évalué en pouces}};$$

de manière que la véritable intensité de la force exercée par les molécules dont il s'agit doit égaler au moins

$$\frac{1000 \times \text{le diamètre de la terre}}{1 \text{ pouce}} = 46,352,000,000 \text{ pouces},$$

multipliés par le nombre énorme rapporté plus haut, c'est-à-dire plus de 2×10^{44} fois l'intensité du pouvoir attractif ordinaire de la matière.

Telles sont les forces que suppose la doctrine de Newton pour expliquer les phénomènes de la lumière. Dans le système des ondulations, les nombres sont également immenses; ce qui doit tenir au sujet même, qui nous force d'admettre le développement de forces mécaniques que l'on pourrait appeler infinies.

562. — Le docteur Wollaston a proposé d'observer l'angle sous lequel le rayon commence à se réfléchir totalement à l'intérieur, quand il vient frapper la surface commune de deux milieux dont l'un a un pouvoir réfringent connu, pour déterminer par ce moyen l'indice de réfraction de l'autre milieu.

Dans les *Transact. philos.* pour 1802, il décrit un appareil ingénieux qui donne la mesure de l'indice cherché, presqu'à la simple inspection de l'instrument. Si l'on place un objet quelconque sous la base d'un prisme de flint-glass qui n'en est séparé que par une couche d'air, l'angle d'incidence interne sous lequel le rayon visuel commence à être réfléchi entièrement est d'environ 39° 10'. L'objet alors cesse d'être visible par réfraction; mais, s'il est plongé dans l'eau et mis en contact avec le verre, l'œil le voit de nouveau par réfraction, à cause du pouvoir réfringent de l'eau, jusqu'à ce que l'angle d'incidence interne atteigne 57° $\frac{1}{2}$. Quand on interpose une huile quelconque ou un ciment résineux, cet angle est toujours plus grand en raison du pouvoir réfringent du milieu que l'on emploie. Si ce pouvoir surpasse celui du verre (comme ponr certains ciments), l'objet sera vu à travers le prisme sous tous les angles possibles.

Pour déterminer, d'après cette méthode, l'indice de réfraction d'un milieu moins réfringent que le verre, il suffit de mettre en contact avec la base du prisme la substance que l'on veut examiner, et d'abaisser l'œil (ou d'augmenter l'angle d'incidence) jusqu'à ce qu'on cesse de voir l'objet comme une tache obscure sur la snrface argentée du reste de la base. Il est aisé d'obtenir ce contact avec des fluides et des milieux mous ou fusibles. Quant aux solides, on doit polir leurs surfaces et les coller à la base du prisme avec un fluide ou un ciment dont le pouvoir réfringent surpasse celui du verre. Ce fluide ne pourra causer aucune erreur, car ses deux surfaces étant parallèles, il ne change point la déviation totale.

On peut examiner ainsi des corps opaques aussi-bien que des substances transparentes, et même des corps d'une densité variable, comme le cristallin de l'œil. L'expression de *pouvoir réfringent d'un corps opaque* peut sembler bizarre; mais il faut se rappeler que l'opacité n'est que la suite d'un pouvoir absorbant très intense, et qu'avant qu'un rayon pnisse être absorbé, il doit entrer dans le milien et obéir par

conséquent aux lois de la réfraction à sa surface. Par cette méthode, le docteur Wollaston a déterminé les pouvoirs réfringents d'un grand nombre de substances ; mais le docteur Brewster remarque qu'elle comporte un certain degré d'inexactitude ; ce qui fait qu'on n'oserait s'y fier entièrement dans la pratique. Le docteur Young a observé aussi que les indices obtenus de cette manière ne conviennent rigoureusement qu'aux rayons rouges extrêmes.

---

§ II. — *Idée générale de la théorie des ondulations.*

Demandes dans le système des ondulations. — Toutes les ondulations ont la même vitesse. — Objection tirée des phénomènes de la dispersion. — Réponse à l'objection tirée de la propagation de la lumière en ligne droite. — Mode d'action de l'éther sur la rétine. — Mouvement vibratoire d'une molécule lumineuse. — Loi des vibrations rectilignes. — Loi des vibrations rectilignes d'une molécule éthérée. — Ondes lumineuses. — Ondulations ou pulsations. — Les différentes couleurs ont des longueurs d'ondulation différentes. — Direction du rayon. — Loi de l'intensité de la lumière. — Forme de l'onde. — Réflexion perpendiculaire. — Axiomes. — Addition des petits mouvements. — Principe des ondes secondaires. — Loi de la réflexion sur un plan. — Réflexion sur des surfaces courbes. — Loi de la réfraction. — Loi de plus prompte propagation ; sa généralité. — Foyers dans le système ondulatoire ; leur définition. — Intensité d'un rayon réfléchi perpendiculairement. — Résultats de M. Poisson ; comment on s'en sert pour déterminer les indices de réfraction.

563. — La théorie des ondulations, qui compte parmi ses défenseurs les Huygens, les Descartes, les Hooke, les Euler, et, dans ces derniers temps, Young et Fresnel, a servi à expliquer avec un bonheur singulier et une simplicité remarquable certaines classes de phénomènes qui présentent les plus grandes difficultés dans la doctrine corpusculaire. Elle exige l'admission des *demandes* ou hypothèses suivantes :

1° Un milieu élastique, ou *éther*, extrêmement rare et subtil, remplit tout l'espace et pénètre tous les corps en remplissant les intervalles entre leurs molécules. Soit parce qu'il

les traverse librement, soit par l'effet de son excessive rareté, il n'offre aux corps célestes en mouvement aucune résistance que les observations astronomiques les plus délicates puissent rendre appréciable. Doué d'inertie, il est sans pesanteur.

2° Les molécules de l'éther peuvent être mises en mouvement par l'agitation des particules de la matière pondérable. Quand une de ces molécules reçoit une impulsion, elle la communique à toutes celles qui l'avoisinent : c'est ainsi que le mouvement se propage de proche en proche dans toutes les directions, en vertu des mêmes lois dynamiques qui règlent les ondulations des autres milieux élastiques, comme l'air, l'eau ou les solides, suivant leurs constitutions respectives.

3° Dans l'intérieur des milieux dirimants, l'éther se trouve à un état d'élasticité moindre par rapport à sa densité, que dans le vide, c'est-à-dire dans l'espace qu'il occupe lorsqu'on fait abstraction de tous les corps. Plus le milieu est réfringent, moins l'éther y est élastique.

4° Les vibrations imprimées à l'éther dans l'espace libre sont propagées au travers des milieux dirimants au moyen de l'éther intérieur, mais avec une vitesse moindre.

5° Quand certaines vibrations régulières sont propagées par l'éther, et qu'elles traversent nos yeux pour venir ébranler les nerfs de la rétine, elles produisent en nous la sensation de *clarté*, à peu près comme les vibrations de l'air nous donnent l'idée du son en venant frapper les nerfs auditifs.

6° Dans la théorie du son, la fréquence des battements de l'air, ou le nombre des oscillations de chaque molécule aérienne autour de sa position d'équilibre, rend le son plus ou moins aigu et détermine la *note*. Dans le système des ondulations, la fréquence des battements ou des impulsions communiquées aux nerfs de la rétine, en un temps donné, par chaque molécule éthérée, détermine la *couleur* de la lumière; et de même que la grandeur absolue de l'espace parcouru par la molécule d'air est la mesure de la *force* du son,

ainsi l'*amplitude* ou l'étendue des excursions des molécules de l'éther autour de leurs points d'équilibre détermine l'éclat ou l'intensité de la lumière.

564. — L'application des hypothèses précédentes aux phénomènes de la lumière suppose la connaissance des lois de la propagation du mouvement au travers des milieux élastiques.

D'après une de ces lois les plus importantes, tous les mouvements qui se font dans un milieu élastique uniforme et homogène sont propagés dans toutes les directions avec une vitesse constante et uniforme, dépendante uniquement de l'élasticité du milieu comparée à son inertie, sans que la grandeur ou la régularité du mouvement primitif exerce sur elle la moindre influence : ainsi, tandis que l'intensité de la lumière diminue, comme celle du son, par l'accroissement de la distance, sa vitesse demeure invariable; et, de même que les sons de tous les degrés de l'échelle musicale, les rayons lumineux de toute couleur traversent tous avec la même vitesse, soit le vide, soit un milieu homogène.

565. — Maintenant il se présente une grande difficulté, que nous regardons comme l'objection la plus formidable qui puisse être faite à la doctrine ondulatoire. Il s'agit de démontrer : 1° que la déviation de la lumière par un milieu réfringent résulte de la différence des vitesses à l'intérieur et à l'extérieur de ce milieu, 2° que la déviation est connue dès que l'on donne ces vitesses : d'où l'on tire nécessairement la conséquence que les rayons de toutes les couleurs doivent être également réfractés dans tous les cas, et que le phénomène de la dispersion est impossible. Le docteur Young a voulu éluder la difficulté en attribuant à la matière pondérable du milieu réfringent certaines vibrations qui modifieraient la vitesse des ondulations de l'éther d'une manière qui varierait avec le plus ou moins de fréquence de ces ondulations; ce qui produirait une différence dans la vitesse de propagation de chaque couleur. Mais cette

explication nous paraît plus ingénieuse que satisfaisante. Cependant nous prierons le lecteur de suspendre son jugement sur la théorie que nous allons exposer, et de ne pas la condamner d'avance à cause des faits qui *paraissent* incompatibles avec elle, jusqu'à ce qu'il ait pris connaissance d'une multitude de phénomènes compliqués qu'elle explique parfaitement.

Nous avouerons que ni la doctrine corpusculaire, ni celle des ondulations, ni aucun système proposé jusqu'à ce jour, ne donnent une explication complète de *tous* les phénomènes qui se rapportent à la lumière. A tout moment il faut admettre des modes d'action particuliers, pour des forces entièrement inconnues; quelquefois même, quand les raisonnements sont en défaut, on est réduit à croire sur parole. Néanmoins, on ne saurait contester l'importance des hypothèses et des théories, si l'on se borne à les considérer comme un moyen de classer et de grouper ensemble les phénomènes, en les rattachant à des lois empiriques, peut-être, mais qui représentent fidèlement les effets physiques, et doivent se déduire des véritables lois de la nature, si jamais on parvient à les connaître. Le système des ondulations surtout doit offrir nécessairement des points très obscurs; ce qui provient de ce que la théorie de la propagation du mouvement au travers de milieux élastiques est une des branches les plus abstruses des sciences mathématiques. Désespérant de surmonter les difficultés purement analytiques du sujet, nous sommes obligés de raisonner toujours par analogie, sans jamais oser les attaquer directement.

566. — C'est ainsi que nous rencontrons d'abord une nouvelle objection que Newton jugeait décisive, mais qui depuis a été puissamment combattue. Comment il y a-t-il des *ombres ?* Les sons tournent librement autour d'un coin : pourquoi n'en est-il pas de même de la lumière? Une vibration, émanée d'un centre dans un milieu élastique, et interceptée par un obstacle immobile qui n'a qu'une petite ouverture,

doit se propager au-delà de l'écran, à partir de cette ouverture comme d'un nouveau centre, et remplir l'espace d'ondulations dans tous les sens. De même qu'en acoustique, l'orifice produit le même effet qu'une nouvelle source de son, ainsi, en optique, l'ouverture dont nous venons de parler devrait paraître comme un nouveau luminaire d'où la lumière émanerait dans toutes les directions.

On peut répondre, en premier lieu, qu'il n'est pas démontré que le mouvement vibratoire donné à une particule d'un milieu élastique se communique avec la même *intensité* aux molécules environnantes, situées d'une manière quelconque par rapport à la direction du mouvement, quoique cette propagation se fasse avec la même *rapidité*; que nous n'avons par conséquent aucune raison de présumer, *a priori*, que les mouvements des particules vibrantes à l'orifice se propagent latéralement avec une *égale* intensité dans toutes les directions.

En second lieu, qu'il n'est pas vrai que les sons se propagent autour de l'angle d'un obstacle *avec la même intensité* que dans leur direction primitive, comme on peut s'en assurer par l'expérience suivante :

On prend un diapason ordinaire, et, après l'avoir fait vibrer, on le tient à trois ou quatre pouces de l'oreille, dans le sens de sa plus grande largeur. Lorsqu'on distingue parfaitement le son, on interpose, à un demi-pouce environ de l'instrument, un morceau de carte un peu plus large que lui : alors le son est presque entièrement intercepté. Si l'on fait passer et repasser la carte, successivement et avec rapidité, devant les deux branches, on observe que chaque son est suivi d'un instant de silence : ainsi les ondulations de l'air ne se propagent pas autour des bords de la carte avec la même intensité que par la voie directe. En effet, chacun sait que le bruit d'une voiture diminue considérablement quand celle-ci tourne le coin de la rue où l'on se trouve. Même lorsqu'il n'y a point d'obstacle, le son n'est jamais perçu avec la même facilité dans toutes les directions à partir du corps

sonore. On peut s'en convaincre en faisant vibrer près de l'oreille un diapason qui tourne rapidement autour de son axe. Cette expérience a été publiée pour la première fois, à ce que nous croyons, par le docteur Young (*Trans. philos.*, 1802, page 25), et depuis elle a été décrite avec plus de détail par M. Wéber (*Schweiggers Jahrbuch*, 1826). Or, si l'intensité des ondulations n'est pas tout à-fait la même quand elles se propagent directement ou dans le sens latéral, il faut croire que l'inégalité provient de la constitution du milieu, et du rapport de l'amplitude des excursions des particules vibrantes à la distance de ces particules entre elles. Comme ce rapport peut varier à l'infini avec les divers milieux, il n'y a du moins aucune absurdité à supposer l'éther constitué de manière que la propagation latérale y soit très faible.

En troisième lieu, que la lumière s'écarte jusqu'à un certain point de sa direction en ligne droite, pour se mêler aux ombres des corps : d'où résultent les phénomènes de l'*inflexion* ou *diffraction*, dont nous allons bientôt nous occuper, et qui fournissent, dans le fait, les arguments les plus puissants en faveur du système ondulatoire, par la facilité avec laquelle celui-ci les explique. On pourra consulter sur ce sujet difficile notre article Son dans l'*Encyclopédie métropolitaine*, et les auteurs cités à la fin de cet ouvrage. Qu'il nous suffise, pour le moment, d'avoir démontré que cette objection, regardée comme invincible par Newton et ses partisans, ne prouve véritablement rien contre la doctrine ondulatoire; mais qu'elle provient plutôt d'une fausse idée qu'ils s'étaient formée de la nature des fluides élastiques et des lois de leurs ondulations.

567. — Quoique toute espèce d'impulsion ou de mouvement réglé par une loi quelconque puisse se communiquer de molécule à molécule dans un milieu élastique, l'on suppose cependant, dans la théorie de la lumière, que nos organes ne peuvent être affectés que par des impulsions régulières, périodiques, répétées plusieurs fois de suite et après des

intervalles égaux. Pour ébranler les molécules des nerfs de la rétine, il faut que les impulsions presque infiniment petites de l'éther se répètent un nombre de fois suffisant pour multiplier et concentrer, pour ainsi dire, leurs effets. De même qu'un grand pendule peut être mis en mouvement par une force très petite appliquée à des intervalles exactement égaux à la durée d'une de ses oscillations, ou qu'un solide élastique en vibration communique son mouvement, par l'intermédiaire de l'air, à un autre corps en repos qui se trouve à l'unisson avec lui, ainsi l'on peut concevoir que les grosses fibres nerveuses de la rétine sont ébranlées par l'éther, qui répète ses impulsions. Ces fibres elles-mêmes ne reçoivent ce mouvement particulier qu'en vertu de leur composition, de leur forme et de leur élasticité, qui les rendent susceptibles de vibrer en des temps exactement égaux à ceux des impulsions de l'éther. Maintenant il est aisé de concevoir comment on peut fixer les limites des couleurs appréciables. S'il n'y a pas de fibres nerveuses à l'unisson avec les vibrations de l'éther, celles-ci ne produisent point de sensation tant que leur fréquence n'est pas renfermée entre certaines limites : c'est ainsi qu'une seule impulsion, ou une suite d'impulsions irrégulières, ne saurait produire la lumière, et que les vibrations de la rétine se prolongent encore quelque temps après que leur cause a cessé, surtout si la lumière est très vive, en affectant notre œil de la manière décrite à l'art. 543. Il peut donc exister d'autres animaux, tels que des insectes, incapables de percevoir les couleurs que nous connaissons, et dont toutes les impressions de lumière sont dues à une classe de vibrations hors des limites qui nous sont propres, comme le docteur Wollaston l'a ingénieusement imaginé (nous pourrions presque dire prouvé), en parlant de la manière dont ces êtres perçoivent les sons.

568. — Le mouvement de chaque particule de l'éther est réglé par celui de la molécule du luminaire qui le produit. Il est périodique et régulier si tel est le mouvement de cette

molécule; mais, dans la théorie, on n'a besoin de considérer que des mouvements infiniment petits. Le déplacement de chaque particule de l'éther ou du luminaire est supposé assez petit pour ne point la détacher des particules voisines ou changer l'*ordre* de sa situation à l'égard de celles-ci. Si l'on ne considère que les déplacements infiniment petits hors de la position d'équilibre, il est évident que la tension qu'ils doivent causer, ou la force qui pousse la molécule déplacée, doit être proportionnelle à la distance parcourue à partir du point de repos, et doit être dirigée vers ce point, pourvu qu'on suppose le milieu également élastique dans toutes les directions. La dynamique nous apprend qu'alors la trajectoire de cette molécule est une ellipse dont le centre est le point d'équilibre. Quand un des axes de l'ellipse s'évanouit, la trajectoire devient une ligne droite, dont ce point occupe le milieu, et sur laquelle la molécule a un mouvement de *va et vient*. Les révolutions dans le premier cas et les excursions dans le second sont isochrones et suivent la loi du pendule.

Nous examinerons maintenant le cas de vibrations rectilignes, comme étant le plus simple, et nous montrerons ensuite comment on peut y réduire le cas général.

Problème.

569. — Déterminer le mouvement d'une molécule vibrante d'un luminaire, en supposant que les excursions aient lieu en ligne droite.

Nommant x la distance variable de la molécule au point de repos, t le temps écoulé depuis une époque fixe, v la vitesse, et E la force d'élasticité absolue, la force qui pousse la molécule vers son point d'équilibre sera Ex, et tendra à diminuer les x.

On aura donc

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2x}{dt^2} = Ex,$$

et par conséquent

$$\frac{2\, d^2 x \,.\, d x}{d t^2} = -\, 2\, E\, x\, d x\,;$$

intégrant des deux parts,

$$\frac{d x^2}{d t^2} = E\,(a^2 - x^2) = v^2,$$

a désignant la plus grande excursion, ou la *demi-amplitude* de la vibration.

Puisque

$$v = \sqrt{E}\,.\,\sqrt{a^2 - x^2} = -\,\frac{d x}{d t},$$

$$d t = -\,\frac{d x}{\sqrt{E}\,.\,\sqrt{a^2 - x^2}},$$

ou, en intégrant,

$$t + C = \frac{1}{\sqrt{E}}\ \text{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right);$$

ce qui donne

$$x = a\,.\,\cos\left[\sqrt{E}\,(t + C)\right],$$

$$v = a\,.\,\sqrt{E}\sin\left[\sqrt{E}\,(t + C)\right].$$

Telles sont les expressions de la vitesse de la molécule et de sa distance du milieu de la vibration, à un instant quelconque. En nommant T la période pendant laquelle la molécule achève son excursion complète des deux côtés du point d'équilibre, nous aurons, à l'origine du mouvement, quand $v = 0$ et que $x = a$,

$$a\,.\cos\left[\sqrt{E}\,.\,(t + C)\right] = a, \text{ ou } (t + C)\sqrt{E} = 0.$$

Au quart de la période, c'est-à-dire quand la molécule est à sa plus grande distance $-a$ de l'autre côté du centre,

$$-a = a \cdot \cos\left[\sqrt{E}\left(t + \frac{1}{2}T + C\right)\right]$$

ou

$$\sqrt{E} \cdot \left(t + C + \frac{1}{2}T\right) = \pi,$$

en désignant par π la demi-circonférence dont le rayon vaut l'unité. Il vient alors, par soustraction,

$$\frac{1}{2}T \cdot \sqrt{E} = \pi, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{E}};$$

ce qui nous permet d'éliminer $\sqrt{E}$, et de remplacer cette quantité par sa valeur en T, qui est

$$\sqrt{E} = \frac{2\pi}{T}:$$

par conséquent

$$x = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t + C}{T}\right),$$

$$v = a\sqrt{E} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t + C}{T}\right).$$

Ces équations expriment la loi cherchée, et deviennent simplement

$$x = a \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right),$$

$$v = a\sqrt{E} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right),$$

quand on compte le temps à partir du moment où $v = 0$, c'est-à-dire où la molécule est à la fin d'une de ses excursions.

570. — *Corollaire*. Ainsi les excursions de la molécule auront quatre phases principales, pendant lesquelles le mouvement sera semblable, mais en sens contraire, ou de côtés

opposés par rapport au centre d'ébranlement. Dans la première phase, la molécule se trouvera à droite du centre, dont elle s'approchera en se dirigeant de la droite vers la gauche; dans la seconde phase elle sera à gauche, et tendra à s'écarter du centre : nous appellerons *positives* ces deux phases. Dans la troisième, la molécule se trouvera à gauche, et son mouvement la rapprochera du centre, de gauche à droite; dans la quatrième elle sera de nouveau à droite, mais elle s'éloignera du centre, en se mouvant encore de gauche à droite : nous donnerons à ces dernières phases le nom de *négatives*.

Problème.

571. — Déterminer les vibrations rectilignes d'une molécule de l'éther dues à une particule matérielle qui vibre comme on l'a supposé dans le problème précédent.

Quand une impulsion se propage au travers de milieux élastiques uniformes, chaque molécule communique à celle qui la suit un mouvement semblable au sien; mais cette transmission n'est pas instantanée, et le mouvement d'une molécule, à une distance quelconque de l'origine des vibrations, ne commence qu'après un certain intervalle de temps. Ce temps est celui que met le son, la lumière, etc., à parcourir cette distance avec une vitesse uniforme, due à l'elasticité intrinsèque du milieu. Pour la lumière, il est d'environ 200,000 milles (1,056,000,000 pieds) par seconde, et de 1,100 pieds pour le son. Quand le luminaire cesse ses vibrations, celles de la molécule éthérée ne cessent pas tout à coup, mais elles continuent pendant un temps égal à celui qui s'est écoulé entre la première impulsion et le commencement de la vibration. En dénotant par V la vitesse de la lumière, et par D la distance de la molécule au point lumineux, $\frac{D}{V}$ sera donc l'intervalle entre l'instant où commence la vibration de la particule matérielle, et celui où commence celle de la molécule éthérée.

Ainsi, t désignant le temps écoulé depuis le commencement de la première phase de vibration positive du point lumineux, $t - \frac{D}{V}$ sera le temps qu'il faudra prendre dans le cas d'une molécule éthérée.

Les équations du mouvement sont donc :

Pour le point lumineux, en posant $a\sqrt{E} = b$,

$$x = a \cdot \cos 2\pi \cdot \frac{t}{T}, \quad v = b \cdot \sin 2\pi \cdot \frac{t}{T};$$

Pour la molécule d'éther,

$$x = \alpha \cdot \cos 2\pi \cdot \left\{\frac{t - \frac{D}{V}}{T}\right\},$$

$$v = \beta \cdot \sin 2\pi \cdot \left\{\frac{t - \frac{D}{V}}{T}\right\},$$

α étant la demi-amplitude de la vibration, ou l'étendue d'excursion de la molécule, et β ayant pour valeur $\alpha\sqrt{E}$.

572. — *Coroll.* 1. Il est évident que la vitesse des molécules de l'éther peut être indéfiniment moindre que celle de la lumière : car la plus grande valeur numérique de v ne dépend que de celle de α, ou de l'amplitude de l'excursion, de l'élasticité E, et nullement de V, vitesse de propagation de l'onde lumineuse.

573. — *Coroll.* 2. Si nous supposons que la particule lumineuse ait fait, depuis l'origine de son mouvement, un certain nombre de vibrations et de parties de vibration pendant le temps t, en considérant une molécule de l'éther, qui se trouve à une distance V t de la particule et dans une direc-

tion quelconque, c'est-à-dire sur une sphère dont le rayon est V t, [illegible] temps t. Si l'on conçoit une autre sphère concentrique à la première, mais dont le rayon soit moindre de V T, chaque molécule située sur cette surface aura justement achevé une vibration et en commencera une seconde, et ainsi de suite. L'intervalle entre ces surfaces, partagé en couches sphériques et concentriques, renfermera des molécules dans toutes leurs phases de vibration, celles de chaque couche se trouvant dans la même phase. Cet assemblage de molécules se nomme une *onde*; et, comme l'impulsion continue en avant, il est évident que le rayon de l'onde doit augmenter, et que celle-ci doit atteindre successivement toutes les molécules du milieu.

574. — *Définition*. L'intervalle entre la surface intérieure et la surface extérieure d'une onde lumineuse s'appelle une *ondulation* ou pulsation. Sa longueur, que nous désignerons par λ, est évidemment

$$\lambda = V T.$$

C'est l'espace que parcourt la lumière pendant le temps T d'une période totale ou de la vibration d'une particule lumineuse : cette longueur est par conséquent proportionnelle à T.

575. — Ainsi les longueurs d'ondulation ne sont pas les mêmes pour tous les rayons colorés : car, d'après la sixième demande, le nombre de vibrations que font les molécules de l'éther en un temps donné détermine la couleur. Or, plus les vibrations sont nombreuses (le temps restant le même), plus leur durée doit être courte : conséquemment T, la durée de l'ondulation, et λ, sa longueur, doivent être moindres pour les rayons violets que pour les rayons rouges.

Des expériences que nous rapporterons bientôt nous apprennent que les longueurs des ondulations dans l'air, ou les

valeurs de λ pour les divers rayons, ainsi que leur nombre pendant une seconde, sont telles que les donne la table suivante :

COULEURS.	LONGUEURS d'ondulation dans l'air, estimées en parties de pouce, ou λ =	RAPPORT du pouce à ces longueurs, ou $\frac{1}{\lambda}$ =	NOMBRE DES ONDULATIONS par seconde.
Extrême rouge.	0.0000266	37640	458,000000,000000
Rouge	0.0000256	39180	477,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000246	40720	495,000000,000000
Orangé	0.0000240	41610	506,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000235	42510	517,000000,000000
Jaune	0.0000227	44000	535,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000219	45600	555,000000,000000
Vert.	0.0000211	47460	577,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000203	49320	600,000000,000000
Bleu	0.0000196	51110	622,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000189	52910	644,000000,000000
Indigo.	0.0000185	54070	658,000000,000000
Intermédiaire .	0.0000181	55240	672,000000,000000
Violet	0.0000174	57490	699,000000,000000
Violet extrême.	0.0000167	59750	727,000000,000000
			en supposant à la lumière une vitesse de 192,000 milles par seconde.

576. — Nous voyons, par cette table, que la sensibilité de l'œil est resserrée entre des limites beaucoup plus étroites que celle de l'oreille, le rapport des vibrations extrêmes étant à peu près comme 1 . 58 : 1, valeur un peu au-dessous de la sixte mineure, et, par conséquent, beaucoup moindre qu'une octave. On a peine à concevoir comment l'homme a pu mesurer exactement des quantités si petites : car ces pé-

riodes et ces espaces sont *réels*, quelle que soit la théorie que l'on adopte, puisque Newton les a déduits de mesures directes. Leurs noms seuls les rattachent au système que nous exposons.

577. — Dans l'hypothèse actuelle, les rayons sont tous dirigés perpendiculairement à la surface de l'onde. Quand la vibration se propage donc au travers d'un éther uniforme, l'onde étant limitée par des surfaces sphériques, la direction du rayon est constante et passe par le centre : ainsi, d'après ce système, la lumière doit se propager en ligne droite dans un milieu uniforme.

578. — L'intensité du rayon a nécessairement un certain rapport avec l'impression faite sur la rétine, en un temps donné, par les molécules de l'éther, et par conséquent avec les amplitudes d'excursion et les vitesses absolues de ces molécules. Le principe de la conservation des forces vives exige que l'amplitude d'excursion de la molécule qui se trouve à une distance quelconque du centre d'ébranlement soit en raison inverse de cette distance. En supposant donc que l'impression faite sur la rétine soit simplement proportionnelle à l'*inertie* de la molécule, la lumière doit décroître *en raison inverse de la distance*, et *en raison inverse du carré de la distance*, si l'on regarde cette impression comme proportionnelle à la *force vive*, qui croît comme le *carré* de la vitesse.

Comme nous ne connaissons rien de la manière dont la lumière ou le son affecte le *sensorium*, nous n'avons point *a priori* de motif péremptoire pour adopter l'un de ces rapports.

Cependant il semble préférable de prendre le carré de la vitesse absolue, ou de l'amplitude d'excursion de la molécule vibrante, pour mesure de l'intensité de la lumière, quand on a égard aux considérations suivantes :

Lorsqu'un faisceau lumineux se divise, soit par la réflexion

partielle, soit par la double réfraction ou autrement, dans un milieu parfaitement diaphane et poli, il n'y a jamais de perte de lumière; de manière que la somme des intensités demeure constante, malgré les changements de grandeur ou de signe (1) qu'éprouvent les vitesses absolues des molécules en vibration. Si l'on supposait le décroissement en raison inverse de la simple distance, le principe du mouvement uniforme du centre de gravité nous obligerait à regarder comme constante non la *somme*, mais la *différence* de ces intensités; ce qui donnerait un résultat contraire à l'expérience.

579. — Quand le milieu qui transmet les vibrations n'est pas uniformément élastique, les ondes avancent irrégulièrement dans certaines directions, suivant la loi de l'élasticité : dans ce cas, la figure des ondes n'est pas sphérique. En supposant que l'élasticité varie par gradations insensibles (comme dans l'atmosphère, par exemple, dont le pouvoir réfringent est variable), l'onde s'aplatira du côté où l'élasticité est moindre : ainsi, dans la fig. 126, soit AB la surface de la terre, CD, EF, GH, etc., les couches atmosphériques, et S un point lumineux, les ondes diminueront de courbure à mesure qu'elles s'approcheront de la perpendiculaire SB. Si l'on représente le rayon par la ligne S, r, 2, 3, 4, 5, etc., menée de manière à couper toutes les ondes à angles droits, cette courbe se redressera en approchant de la surface AB, et le rayon paraîtra attiré vers le centre de la terre, comme on l'observe effectivement.

Voyons maintenant comment on explique les phénomènes de la réflexion et de la réfraction.

580. — La réflexion perpendiculaire de la lumière peut se concevoir par analogie avec une balle élastique qui vient

(1) Comme dans le cas de la réflexion, où l'on doit supposer que les molécules rebondissent les unes sur les autres, immédiatement ou non.

choquer une autre balle en repos : c'est ainsi que l'a traitée le docteur Young. Si les balles sont de même grosseur, tout le mouvement de la première passe dans la seconde sans aucun rebondissement, et l'impulsion peut se communiquer ainsi au bout d'une file de balles, aussi longue que l'on voudra, sans éprouver de diminution : tel est le mouvement de la lumière dans un milieu uniforme ou dans un milieu d'égale élasticité. Mais si la balle qui se meut est plus petite que celle qui est en repos, elle sera repoussée avec une quantité de mouvement d'autant plus grande que les balles diffèrent davantage.

581. — Pour rendre compte de la réflexion et de la réfraction obliques, ainsi que d'autres phénomènes dont nous devons encore parler, nous nous fonderons sur les principes suivants, qui sont ou des axiomes ou des conséquences immédiates des lois de la dynamique.

582. — 1° Quand un nombre quelconque de petites impulsions est donné à la fois aux particules d'un milieu ou d'un système de corps soumis à l'influence de forces quelconques, le mouvement de chaque particule est la somme de tous les mouvements partiels, considérés comme ayant lieu séparément : le mot *somme* doit se prendre ici dans son acception algébrique.

583. — 2° Chaque molécule en vibration dans un milieu élastique, soit que ce mouvement provienne d'une impulsion primitive ou du choc d'autres molécules, peut être considérée comme un centre d'ébranlement dont émane, dans toutes les directions, un système d'ondes secondaires, conformément aux lois qui règlent la propagation des ondes dans un milieu.

584. — *Théorème*. Dans la réflexion, suivant la doctrine ondulatoire, l'angle d'incidence égale l'angle de réflexion.

Soit A B (fig. 127) une surface plane qui sépare les deux milieux, et S le point lumineux d'où émane une série d'ondes sphériques telles que A a. Aussitôt qu'une de ces ondes atteint la surface en A, il se fait une réflexion partielle. En regardant A comme un nouveau centre d'ébranlement, les ondes qu'il émettra pénétreront en partie dans le milieu réfléchissant, avec une vitesse plus ou moins grande que celle de l'onde incidente, suivant les circonstances; tandis que les autres seront renvoyées dans le milieu où se fait la réflexion, en conservant leur vitesse. Ce n'est que de ces dernières que nous avons à nous occuper.

Concevons maintenant que l'onde A a avance jusqu'en B b : pendant qu'elle parcourt l'espace P B, l'onde émanée de A parcourra en sens contraire la distance A d = P B, et sera représentée par l'hémisphère dont le rayon est A d.

Entre A et B prenons un point quelconque X, et traçons la surface hémisphérique X c. Si l'on regarde alors X comme un centre d'ébranlement, ce point ne commencera à vibrer que du moment où l'onde l'aura atteint, c'est-à-dire plus tard que A de tout le temps que l'onde A a aura mis à parcourir P Q. Mais, une fois en mouvement, ses vibrations se propageront dans le sens de X vers c avec la même vitesse ; de manière que, lorsque l'onde primitive se trouvera dans la position B b, l'onde émanée de X formera un hémisphère dont le rayon X c = P B — P Q = Q B.

Comme on peut appliquer le même raisonnement à chaque point tel que X, si l'on se figure une surface qui touche tous ces hémisphères en d, c, B, elle marquera les points atteints par les ondes réfléchies, et ces points commenceront à s'ébranler précisément quand l'onde primitive aura atteint B : ils formeront donc la surface de l'onde réfléchie. Prolongeons maintenant la surface b B au-dessous du plan A B en B C D, et faisons la même construction pour toutes les sphères autour de A et de X : les surfaces sphériques B C D et

C c, étant toutes deux perpendiculaires à S X C, doivent se toucher en C; d'où il suit que la surface qui enveloppe tous les hémisphères dont les centres sont A, X, etc., au-dessous de A B, est un segment sphérique ayant S pour centre : par conséquent, la surface B *c d* de l'onde réfléchie est un segment de sphère dont le centre est en *s*, à la même distance que S, au-dessous du plan A B.

Or le point S sera vu par un œil placé en X, dans la direction S X perpendiculaire à l'onde incidente, et l'œil placé en *c*, apercevra l'image réfléchie de S, en *s*, dans la direction *c s* perpendiculaire à l'onde réfléchie. Mais *c s* doit passer par X, parce que les sphères *c* C et B *b* se touchent en *c* : le rayon visuel qui fait paraître *s* en *c* passe donc aussi par X.

De l'égalité des surfaces B D, B *d*, on conclura celles des angles B X *c* et A X S, c'est-à-dire des angles d'incidence et de réflexion. C. Q. F. D.

585. — *Corollaire.* Si la surface réfléchissante n'était pas un plan, l'onde réfléchie ne serait point sphérique. Cependant on déterminerait aisément sa forme de la manière suivante :

Supposons que l'onde directe ait pris la position B *b* (fig. 128) : par un point quelconque X de la surface faisons passer la sphère X Q, dont le centre est S, et du point X, avec un rayon = B Q, décrivons une autre sphère. Si l'on fait la même construction pour chaque point de la surface A B, la surface-enveloppe (telle que B *c d*) de toutes les sphères sera celle de l'onde réfléchie, car elle marque la dernière limite que la lumière réfléchie aura atteinte dans toutes les directions, au moment où l'impulsion primitive sera parvenue en B.

Prenons maintenant un point Y infiniment voisin de X ; et, faisant la même construction en Y, désignons par *c* et *e* les points où l'onde réfléchie est percée par les normales X *c* et Y *e*; abaissons sur Y *e* et sur S Y *q* les perpendiculaires X *r* et X *q*.

Puisque

$$Y\,e = S\,B - S\,Y \text{ et } X\,c = S\,B + S\,X,$$

nous aurons

$$Y\,e - X\,c \text{ ou } Y\,r = S\,X - S\,Y = Y\,q\,;$$

de plus, X Y étant commun aux deux triangles rectangles XYr, XYq, l'angle rYX doit être égal à XYq ou à SYA. Ainsi la même loi de réflexion a lieu pour les surfaces courbes.

Problème.

586. — Démontrer la loi de la réfraction dans le système ondulatoire.

Soit S (fig. 129) un point lumineux, et supposons que l'onde qui en émane atteigne successivement les points Y, X et B, infiniment rapprochés et appartenants à la surface courbe Y X B d'un milieu réfringent. Lorsque l'onde vient frapper Y X B, chacun de ces points devient un centre d'ondulations qui se propagent, dans le milieu dirimant, avec une vitesse différente de celle de la lumière dans le milieu d'incidence, à cause de l'inégale élasticité de ces milieux (3e *demande*).

Soit

V : v :: la vitesse dans le premier milieu.

: : la vitesse dans le second.

Ce rapport sera constant par hypothèse.

Décrivant la sphère B Q R, l'on prendra

$$X\,c = \frac{v}{V} \cdot Q\,X$$

et

$$Y\,e = \frac{v}{V} \cdot Y\,R.$$

X *c* et Y *e* représenteront alors les espaces parcourus par les ondes secondaires émanées de X et de Y, au moment où l'onde directe aura atteint B : par conséquent, si des points X et Y comme centres, avec des rayons respectivement égaux à ces espaces, on décrit des sphères, et qu'on regarde *e* et *c* comme les points où la surface courbe touche ces sphères, il est évident que X *c* et Y *e* seront normales à cette surface, c'est-à-dire à celle de l'onde réfractée : X *c* et Y *e* seront donc les directions des rayons réfractés en X et en Y. Soient abaissées sur Y R et sur Y *e* les perpendiculaires X *q* et X *r*, on aura

$$Y q = S X - S Y \text{ et } Y r = Y e - X c,$$

$$Y e - X c = \frac{v}{V} . Y R - \frac{v}{V} . X Q = \frac{v}{V} (Y R - X Q)$$

$$= \frac{v}{V} [(SR - SY) - (SQ - SX)] = \frac{v}{V} (SX - SY) = \frac{v}{V} . Y q;$$

d'où l'on tire

$$Y q : Y r :: V : v.$$

Mais, puisque S X, S Y, sont les rayons directs, et X *c*, Y *e*, les rayons réfractés qui leur correspondent, l'angle S X Y est le complément de l'angle d'incidence de S X, et par conséquent Y X *q* est égal à l'angle d'incidence même. L'angle X Y *r* étant le complément de l'angle de réfraction,

$$Y X r \ (= 90^\circ - X Y r),$$

$$= \text{l'angle de réfraction de } S Y \text{ ou de } S X,$$

puisque les points Y et X sont infiniment rapprochés.

On conclura de ce qui précède que

$$Y q : X Y :: \text{sin d'incidence} : 1,$$

$$X Y : Y r :: 1 : \text{sin de réfraction};$$

et, *componendo*,

$$Y q : Y r :: \text{sin d'incidence} : \text{sin de réfraction}.$$

Mais nous avons prouvé précédemment que

$$Yq : Yr :: V : v ;$$

les sinus d'incidence et de réfraction ont donc entre eux le même rapport, que nous savons être constant. C.Q.F.D.

587. — *Corollaire* 1. L'ondulation se propage dans le moindre temps possible, à partir du point lumineux, dans les deux cas de la réflexion et de la réfraction.

En effet, les ondes réfléchies ou réfractées marquent toujours la dernière limite à laquelle l'impulsion s'est fait sentir dans un temps donné. L'ondulation émanée de X (fig. 127), dans toute autre direction que X*c*, comme Xγ, par exemple, n'atteindra pas la surface B*cd* : le point γ aura donc été dépassé par l'onde primitive réfléchie ou réfractée, quand elle se trouvait dans la situation $\beta\gamma\delta$, avant d'être atteint par l'onde secondaire émanée de X dans la direction Xγ.

588. — *Coroll.* 2. Cette propriété correspond, dans le système ondulatoire, au principe de moindre action dans la théorie corpusculaire. On peut l'énoncer généralement comme il suit :

Le rayon réfléchi ou réfracté suit toujours une route telle que la tracerait, dans le moins de temps possible, un point qui se mouvrait entre les points de départ et d'arrivée, en ayant égard aux changements de vitesse occasionés par les milieux, et à la direction du mouvement.

589. — Cette loi comprend, par sa généralité, les cas où l'élasticité du milieu est variable, et ceux où l'élasticité est différente dans certaines directions : car, d'après sa définition, le rayon n'est qu'une normale à la surface de l'*onde*, c'est-à-dire à la surface qui est le lieu de toutes les molécules du mi-

lieu atteintes en même temps par l'ondulation et commençant ensemble à s'ébranler.

Ainsi le raisonnement du corollaire 1 s'applique à tous les cas possibles.

590. — Les propriétés des foyers et des caustiques se déduisent de cette doctrine avec tant d'élégance et de facilité, qu'il serait impardonnable de ne pas en donner au moins un exemple.

Définition. On nomme *foyer* tout point auquel l'onde arrive au même instant de plus d'un point de la surface.

Il est évident que les molécules de l'éther sont animées au foyer par la force collective de toutes les ondulations qui viennent les frapper dans la même phase et au même instant : cette force sera d'autant plus grande que le foyer sera commun à un plus grand nombre de points, et la lumière au foyer en sera d'autant plus intense.

Problème.

591. — Assigner la nature de la surface qui réfracterait rigoureusement vers un point tous les rayons émanés d'un autre point.

Soit F (fig. 129) le foyer. Chaque partie de l'onde émanée de S et réfractée à la surface AB atteindra F au même instant : par conséquent, la somme des temps employés à parcourir SX avec la vitesse V, et FX avec la vitesse v, est constante pour chaque point de la surface, c'est-à-dire que

$$\frac{SX}{V} + \frac{FX}{v} = \text{constante ou } SX + \mu \,.\, FX = \text{constante},$$

μ étant l'indice de réfraction relatif.

Cette équation détermine la nature de la courbe cherchée. On remarquera aisément son identité avec l'équation (n) de l'art. 232, obtenue en se servant de la loi même de la réfraction, mais par une analyse beaucoup moins simple.

592. — L'imperfection de nos connaissances actuelles sur la théorie des ondes ne nous permet pas de calculer généralement l'intensité d'un rayon réfléchi ou réfracté. Néanmoins, en supposant que le rayon incident était perpendiculaire, et que les vibrations avaient lieu dans sa direction, M. Poisson est parvenu à déterminer les intensités relatives des rayons incident, réfléchi et transmis. Voici ses résultats :

En désignant par μ, μ', les indices de réfraction absolus, et en regardant l'*intensité* de la lumière comme proportionnelle au *carré* de la vitesse absolue des molécules vibrantes, on a

L'intensité du rayon réfléchi : celle du rayon incident

$$:: (\mu' - \mu)^2 : (\mu' + \mu)^2,$$

L'intensité du rayon transmis : celle du rayon incident

$$:: 4\mu^2 : (\mu' + \mu)^2.$$

Dénotons par μ, μ', μ'', les indices de réfraction de trois milieux superposés dont les surfaces sont parallèles. Quand un rayon, venant du premier milieu, traverse le second pour se réfléchir à la première surface du troisième, son intensité, au moment où il retourne en émergeant dans le premier milieu, *est à* celle qu'il avait avant son incidence à la surface du second milieu *comme*

$$16\mu^2\mu'^2(\mu'' - \mu')^2 : (\mu + \mu')^4(\mu' + \mu'')^2.$$

Enfin l'intensité du rayon qui pénètre dans le troisième milieu *est à* celle du rayon incident à la surface du second *comme*

$$16\mu^2\mu'^2 : (\mu + \mu')^2 . (\mu' + \mu'')^2 ;$$

ce qui devient, dans le cas où le troisième milieu est le même que le premier,

$$:: 16\mu^2\mu'^2 : (\mu + \mu')^4.$$

593. — C'est ainsi que la doctrine ondulatoire fournit une explication plausible de la connexion du pouvoir réfléchissant d'un milieu avec son indice de réfraction, et de la diminution de la lumière réfléchie à la surface commune de deux milieux en contact.

Les résultats de M. Poisson s'accordent, en général, avec toutes les expériences que l'on a faites jusqu'à présent. Le docteur Young les avait déjà prévus en grande partie dans un Mémoire sur le chromatisme (*Encyclop. Brit.*), en suivant un raisonnement que M. Poisson nomme *indirect*, mais qui, selon nous, ne mérite aucunement cette épithète.

594. — Si la photométrie nous met un jour à même de déterminer la proportion de la lumière réfléchie à la lumière incidente, nous pourrons en conclure l'indice de réfraction du milieu réfléchissant dans les cas où l'on ne pourra pas employer d'autre méthode : c'est ainsi que M. Arago s'est assuré que près de la moitié de la lumière incidente se réfléchit quand elle tombe perpendiculairement sur du mercure.

Nous avons, dans ce cas,

$$\left(\frac{\mu' - \mu}{\mu' + \mu}\right)^2 = \frac{1}{2};$$

d'où

$$\frac{\mu'}{\mu} = 5,829,$$

valeur de l'indice de réfraction du mercure par rapport à l'air.

Ce résultat s'accorde parfaitement avec plusieurs observations optico-chimiques qui semblent assigner aux métaux d'une grande pesanteur spécifique, surtout aux métaux blancs, d'énormes pouvoirs réfringents et dispersifs, quand on en juge par ceux de leurs combinaisons transparentes. Cette intéressante application n'a point échappé au docteur Young, dans le mémoire précité.

595. — Pour compléter la théorie de la réfraction et de la réflexion dans le système ondulatoire, il ne nous reste plus qu'à montrer ce que deviennent les rayons obliques (tels que X y, fig. 127) provenant des ondes secondaires, qui divergent dans toutes les directions et tous les points des surfaces réfléchissantes ou réfractantes, et qui ne contribuent point à la formation de l'onde principale.

Mais, pour en rendre compte, nous devons avoir recours à la doctrine de l'*interférence*, qui est due presque entièrement au génie du docteur Young, quoiqu'on en trouve une esquisse assez bien tracée dans les écrits de Hooke, l'homme le plus ingénieux, peut-être, de son siècle. Newton lui-même s'est livré quelquefois à des spéculations analogues; mais ni les idées éparses de Newton, ni les *aperçus* de Hooke, ne peuvent entrer en parallèle avec la théorie élégante et claire du docteur Young. Si le système de ce physicien n'est pas celui de la nature, c'est du moins une des hypothèses les plus heureuses qu'inventa jamais l'esprit humain pour grouper ensemble certains phénomènes naturels. On admire avec quel bonheur les objections les plus formidables, qui résultaient de certaines découvertes inconciliables, en apparence, avec cette doctrine, n'ont servi qu'à lui prêter un appui inespéré : en effet, l'on n'y rencontre, à chaque pas, qu'une suite de *hasards heureux*, tellement qu'on est forcé d'avouer que, si ce système n'est pas vrai, il mérite de l'être. Nous craignons que les limites de cet ouvrage ne nous permettent pas de lui rendre une justice aussi entière que nous le voudrions.

§ III. — *De l'interférence des rayons lumineux.*

Principes généraux de la doctrine de l'interférence. Cas d'opposition complète ; cas d'accord parfait. — Analogie avec les ondes propagées suivant des canaux. — Les vibrations initiale et finale peuvent être négligées. — Neutralisation de deux rayons de lumière qui se trouvent dans des phases différentes. — Définitions : phases ; amplitude de vibration ; rayons semblables. — Origine d'un rayon ; trouver cette origine. — Recherche du rayon résultant de l'interférence de deux autres. — Théorème de Fresnel. — Composition et décomposition des rayons. — Rapport des intensités. — Problème général des interférences. — Composition et décomposition des vibrations. — Cas d'interférence de vibrations rectilignes. — La vibration résultante est généralement elliptique. — Cas où la résultante est rectiligne ; cas où les vibrations ont la même direction ; cas d'accord parfait entre des vibrations non coïncidentes. — Amplitude et situation de la résultante. — Cas de vibrations circulaires. — Destruction mutuelle des ondes secondaires. — Cas de la transmission d'une onde à travers une ouverture limitée.

596. — Le principe sur lequel est fondée cette partie de la théorie de la lumière est une conséquence de celui de l'*addition des petits mouvements*, énoncé à l'art. 583.

Si deux ondes atteignent ensemble une même molécule éthérée, celle-ci recevra à la fois deux impulsions, et le mouvement qui en résultera sera dirigé suivant la diagonale du parallélogramme dont les côtés représentent ces impulsions : par conséquent, si les vitesses composantes ont presque la même direction, la résultante sera à peu près égale à leur somme, et à leur différence si elles sont opposées. Supposons maintenant :

1° Que deux mouvements vibratoires, produits par une série d'ondulations égales et successives, répétées indéfiniment dans un milieu élastique, se fassent sentir en même temps en un même point, à une distance quelconque de leur centre commun ;

2° Qu'après avoir suivi des routes différentes, soit à cause de l'interposition d'un obstacle ou autrement, leurs directions en ce point se confondent sensiblement ;

3° Que, par suite de l'inégale longueur des routes ou de la

différence des vitesses, le temps qu'une onde emploie à parcourir la première route (A) soit plus court que celui qu'elle mettrait à parcourir la seconde (B).

Il est évident qu'une molécule d'éther qui se trouvera en un point commun aux deux routes A et B commencera à vibrer en vertu des ondulations propagées suivant A, avant d'être atteinte par l'onde qui doit parcourir B : avant la coincidence, son mouvement sera donc le même que si les ondes propagées le long de B n'existaient pas ; mais, après ce moment, il sera à peu près égal à la somme ou à la différence des mouvements que les deux ondulations eussent communiqués séparément à la molécule.

597. — Or il peut arriver que la différence des longueurs des routes, ou la différence des vitesses, soit telle, que les ondes propagées suivant B atteignent l'intersection après des intervalles précisément égaux au temps d'une demi-ondulation, c'est-à-dire qu'elles soient en retard de la moitié du temps qu'une onde met à parcourir un espace égal à une ondulation entière : dans ce cas, la molécule qui serait dans une de ses phases d'excursion autour de son point de repos, en vertu des vibrations propagées suivant A, se trouverait au même instant dans une phase tout-à-fait opposée, en vertu de celles qui suivent la route B, considérées isolément, c'est-à-dire qu'elle se mouvrait en sens contraire avec la même vitesse. (Voy. art. 570.)

La coexistence des deux systèmes de vibrations détruira donc le mouvement, et la molécule restera en repos. La même chose aura lieu si la différence des routes ou des vitesses est telle, que les vibrations propagées le long de B parviennent à l'intersection des routes aux $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc., d'une période d'ondulation entière, après celles qui arrivent par A : en effet, les phases de vibration étant périodiques et répétées indéfiniment, il importe peu que la première vibration propagée suivant B *interfère* avec la première vibration propa-

gée suivant A_4 ou avec une vibration subséquente, pourvu que la différence des phases soit la même.

598. — Il peut arriver aussi que les ondes propagées le long de B n'atteignent le point de rencontre qu'une ou plusieurs périodes après les ondes venant par A : dans ce cas, la molécule à l'intersection des routes sera agitée à chaque instant, après l'arrivée de la première onde venue par B, par les deux vibrations qui se trouveront dans la *même* phase, et conséquemment, la vitesse et l'amplitude des excursions seront doublées au lieu d'être anéanties.

599. — Enfin, la différence des temps d'arrivée peut n'être ni un multiple pair ni un multiple impair d'une demi-période d'ondulation : dans ce cas, la molécule vibrera avec une vitesse moindre que le double de celle qu'elle aurait si chaque impulsion avait lieu séparément.

600. — On peut se former une idée très juste de l'interférence des rayons lumineux, en considérant les intersections des ondes à la surface de l'eau.

Concevons deux canaux de même largeur, A et B, qui se coupent à angles droits dans un réservoir, où arrivent en même temps, d'une grande distance, deux ondes qui ont parcouru les deux canaux avec des vitesses égales et uniformes.

Supposons que les parois soient parfaitement lisses, et que les canaux aient une largeur égale dans toute leur étendue, mais qu'ils s'infléchissent un peu, de manière à se rencontrer à une certaine distance, la courbure de B étant un peu plus forte que celle de A, et la distance du réservoir au point de concours étant plus grande suivant B que suivant A. Si l'on ne considère qu'une seule onde, il est évident que la partie qui aura été propagée le long de A atteindra l'intersection avant celle qui sera venue suivant B, de manière que l'eau sera soulevée par deux ondes successives. D'ailleurs, la cause

de l'ondulation subsistant toujours, et produisant une *série indéfinie d'ondes égales*, si la différence de longueur des deux canaux est précisément égale à la moitié de l'intervalle entre les sommets de deux ondes consécutives, le sommet d'une onde quelconque venue par A parviendra à l'intersection en même temps que l'espace entre les sommets consécutifs de deux ondes venues par B. Ainsi le niveau de l'eau doit s'abaisser autant en vertu de l'une de ces causes qu'il doit s'élever en vertu de l'autre ; il n'éprouvera donc aucun changement.

Or, quand l'onde propagée suivant A traverse le point d'intersection, elle s'abaisse, depuis son maximum d'élévation, par les mêmes degrés que l'onde venue par B s'élève en avançant avec une égale vitesse. Conséquemment, le niveau reste le même au point d'intersection, aussi long-temps que les ondulations se succèdent régulièrement : dès que celles-ci viennent à cesser, la dernière demi-onde qui a parcouru B, ne trouvant point une demi-onde correspondante, venue suivant A, pour interférer avec elle, produira un seul mouvement oscillatoire au point de concours.

601. — Dans la théorie des interférences on peut négliger les ondulations qui ont lieu au commencement et à la fin du mouvement, et qui ne sont point compensées, car leur nombre est trop petit pour exciter la sensibilité de la rétine : on considère alors les rayons interférents comme ayant une durée indéfinie, sans avoir égard au commencement et à la fin des vibrations.

602. — D'après ce qui précède on voit que, si deux rayons ont une origine commune, c'est-à-dire s'ils appartiennent à un même système d'ondes lumineuses ayant un centre commun, et qu'ils suivent des routes différentes pour venir tomber en un point, que nous supposerons sur un écran ou sur la rétine, ils formeront un point brillant dans le premier cas, et produiront la sensation de la clarté dans le se-

cond, pourvu que la différence de leurs routes soit un multiple pair de la longueur d'une demi-ondulation. Au contraire, ils ne formeront qu'un point noir si cette même différence est un multiple impair de cette longueur; si le multiple est un nombre fractionnaire, la sensation sera plus ou moins vive, suivant qu'il approchera davantage d'un nombre pair ou d'un nombre impair. La neutralisation de deux lumières serait regardée comme un étrange paradoxe, si elle n'était confirmée par l'expérience. Ce fait fut observé et soigneusement décrit par Grimaldi long temps avant qu'on pût lui assigner une cause plausible.

603. — Avant de soumettre au calcul la théorie que nous venons d'esquisser, nous croyons nécessaire de fixer le sens de quelques termes que nous avons pris jusqu'à présent dans une acception trop générale.

604. — *Définition*. La *phase* d'une ondulation qui affecte une molécule d'éther en un instant donné est exprimée numériquement par un arc de cercle proportionnel au temps, et dont le rayon est l'unité. Cet arc est nul quand la molécule est en repos à sa plus grande distance d'excursion positive, et devient égal à une circonférence entière quand la molécule, achevant sa vibration, revient à l'état de repos au même point dont elle était partie. Ainsi, dans l'équation

$$v = a \cdot \sqrt{E} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t + C}{T}\right),$$

$2\pi \cdot \frac{t+C}{T}$ est la phase d'ondulation au moment t.

605. — *Définition*. L'*amplitude* de vibration d'un rayon ou d'un système d'ondes est le coefficient a, ou l'excursion *maxima* de chaque molécule d'éther, à compter de son point de repos.

Corollaire. L'intensité d'un rayon de lumière est en raison du carré de l'amplitude de vibration.

606. — *Définition.* Les *rayons semblables* sont ceux dont les molécules constitutives suivent la même loi. Leurs vibrations s'achèvent dans le même temps, et les lignes que décrivent ces molécules sont semblables, et semblablement situées dans l'espace ; de manière que les mouvements de deux molécules correspondantes sont toujours parallèles.

Corollaire. Les rayons semblables ont la même couleur.

607. — *Définition.* L'*origine* d'un rayon ou d'un système d'ondes est le centre matériel de vibration d'où émanent les ondes, ou, plus généralement, un point fixe, dans la direction du rayon, tel qu'à une époque déterminée l'ondulation y soit dans la phase zéro.

608. — *Corollaire.* Deux systèmes d'ondes qui interfèrent à une égale distance de leurs centres peuvent être considérés comme ayant une origine commune.

Problème.

609. — Trouver l'origine d'un rayon, connaissant l'expression de la vitesse d'une de ses molécules vibrantes.

Posons

$$\alpha = a \,.\, \sqrt{E},$$

et soit

$$v = \alpha \,.\, \sin\left(2\pi \,.\, \frac{t + C}{T}\right)$$

l'expression de la vitesse d'une molécule quelconque (M) à l'instant t.

Soient v la vitesse de la lumière, λ la longueur d'une on-

dulation, et δ la distance parcourue par la lumière dans le temps t : on aura alors

$$\delta = V\, t, \quad \lambda = V\, T,$$

et par conséquent

$$\frac{t}{T} = \frac{\delta}{\lambda}.$$

Désignons par v_0 la vitesse d'une molécule vibrante, à l'origine du rayon et au moment t ; nous aurons

$$v_0 = \alpha \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = \alpha \sin\left(2\pi \cdot \frac{\delta}{\lambda}\right).$$

Mais la molécule M ne se meut qu'en vertu d'une impulsion qui lui a été imprimée à l'origine ; par conséquent ses mouvements sont en retard de tout l'intervalle nécessaire pour que la lumière parcoure la distance entre M et l'origine. Nommant D cette distance, $\frac{D}{V}$ est l'intervalle dont il s'agit, et $t - \frac{D}{V}$ le temps écoulé à l'instant t, depuis que la molécule a commencé son mouvement périodique. La vitesse de M doit donc être égale à

$$\alpha \sin\left\{\frac{2\pi\left(t - \frac{D}{V}\right)}{T}\right\},$$

et conséquemment

$$C = -\frac{D}{V} \quad \text{ou} \quad D = -V\, C.$$

L'on voit par là que la distance de la molécule à l'origine est égale à l'espace parcouru par la lumière en un temps représenté par la constante arbitraire C ; qu'ainsi elle est donnée dès que l'on connaît cette dernière quantité, et *vice versa*.

610. — *Corollaire.* Puisque

$$V\,T = \lambda,$$

l'expression de la vitesse devient

$$v = \alpha \,.\, \sin 2\pi \,.\, \left(\frac{t}{T} - \frac{D}{\lambda}\right) = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{\delta - D}{\lambda}\right),$$

et l'on a pareillement

$$x = a \,.\, \cos 2\pi \left(\frac{\delta - D}{\lambda}\right).$$

Problème.

611. — Déterminer la couleur, l'origine et l'intensité d'un rayon résultant de l'interférence de deux autres qui diffèrent d'origine et d'intensité.

Soient a^2 et a'^2 les intensités des rayons interférents, ou a et a' leurs amplitudes de vibration. Posons

$$\alpha = a\sqrt{E} \quad \text{et} \quad \alpha' = a'\sqrt{E}.$$

En dénotant par θ la phase de vibration d'une molécule M à l'instant t, telle qu'elle serait en vertu du système d'ondes (A), et par $\theta + K$ la phase qui résulterait du système (B), $\frac{k}{2\pi}T$ représentera le temps employé par la lumière à parcourir un espace égal à l'intervalle entre M et l'origine, et les vitesses que chaque rayon communique à la molécule seront respectivement

$$v = \alpha \sin \theta, \quad v' = \alpha' \sin (\theta + k),$$

qui correspondent aux distances

$$x = a \,.\, \cos \theta, \quad x' = a' \,.\, \cos (\theta + K) \,;$$

par conséquent la vitesse et la distance résultantes seront

$$v + v' = \alpha \sin \theta + \alpha' \sin (\theta + k)$$

et

$$x + x' = \alpha \cos \theta + \alpha' \cos (\theta + k).$$

Faisons cette dernière expression égale à

$$A \sin (\theta + B),$$

hypothèse que nous justifierons en démontrant la possibilité de soumettre A et B à cette condition : il viendra alors

$$(\alpha + \alpha' \cos k) \sin \theta + \alpha' \sin k \cos \theta$$
$$= A \cdot \cos B \cdot \sin \theta + A \cdot \sin B \cdot \cos \theta,$$

et, en égalant les termes semblables,

$$A \cdot \cos B = \alpha + \alpha' \cos k, \quad A \sin B = \alpha' \cdot \sin k ;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang} B = \frac{\alpha' \sin k}{\alpha + \alpha' \cos k},$$

$$A = \frac{\alpha' \sin k}{\sin B} = \sqrt{\alpha^2 + 2 \alpha \alpha' \cos k + \alpha'^2}.$$

Les seconds membres de ces équations étant donnés, l'on connaîtra A et B, et par conséquent

$$x + x' = A \sin (\theta + B).$$

En écrivant

$$A' \cos (\theta + B)$$

au lieu de $x + x'$, on trouvera pour A' et B' des valeurs semblables à celles de A et de B, en changeant simplement α et α' en a et a'.

612. — *Corollaire* 1. Nous conclurons de ce qui précède que le rayon résultant est semblable à ceux qui le composent, et qu'il a la même période, c'est-à dire la même couleur.

613. — *Coroll.* 2. C'est à Fresnel qu'on doit la règle suivante pour déterminer l'amplitude et l'origine du rayon résultant. Elle dérive immédiatement de la valeur de A et de l'équation

$$\sin B = \frac{a'}{A} \sin k$$

trouvée plus haut.

Si l'on construit un parallélogramme dont les côtés adjacents soient proportionnels aux amplitudes *a* et *a'* des rayons composants, et que l'angle compris, mesuré par un arc de cercle dont le rayon = 1, soit égal à la différence des phases de ces mêmes rayons, la diagonale de ce parallélogramme représentera l'amplitude du rayon résultant. L'angle entre cette diagonale et l'un des côtés représentera la différence de phase entre le rayon résultant et le rayon composant représenté par ce côté, ou, ce qui revient au même, la différence de leurs origines quand on emploie des mesures linéaires.

614. — *Coroll.* 3. Dans le cas d'opposition complète, la diagonale du parallélogramme devient nulle ; l'angle devient égal à 180°, et correspond à une différence d'origine égale à une demi-ondulation.

Dans le cas d'accord parfait, l'angle est zéro ou 360°, et les origines des rayons coïncident ; ou, ce qui revient au même, elles diffèrent d'une ondulation entière ; la diagonale est égale au double d'un des côtés adjacents, de manière que l'*intensité* du rayon résultant est quadruple de celle de chaque rayon composant.

615. — *Coroll.* 4. Si les origines de deux rayons également intenses diffèrent d'un quart d'ondulation, l'amplitude du rayon résultant sera, à celle de chaque rayon composant, dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 : son intensité sera donc double, et la différence entre son origine et celle d'un rayon composant sera d'un huitième d'ondulation.

Ainsi, dans ce cas particulier, le rayon résultant a un *éclat* égal à la somme des éclats des rayons composants, et sa direction tient exactement le milieu entre celles des deux autres.

616. — *Coroll.* 5. Tout rayon peut se partager en deux autres d'origine et d'amplitude différentes, en observant les règles qui concernent la décomposition des forces en mécanique.

617. — *Coroll.* 6. — La somme des *intensités* des rayons composants surpasse l'intensité du rayon résultant, quand la différence des origines est au-dessous d'un quart d'ondulation; mais elle lui est inférieure lorsque cette différence tombe entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$, et encore une fois supérieure entre les limites $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$: en effet, la valeur de A′, rapportée plus haut, donne

$$a^2 + a'^2 - A^2 = 2\ a\ a'.\cos k;$$

a^2, a'^2 et A^2, représentant les intensités respectives des rayons dont les amplitudes sont a, a' et A.

Coroll. 7. On peut *composer* de la même manière un nombre quelconque de rayons semblables; le rayon résultant sera semblable à ceux qui ont servi à le former, et réciproquement.

618. — Considérons maintenant l'interférence d'ondes ayant la même période (ou couleur), mais qui diffèrent sous tous les autres rapports.

Les molécules qui composent les corps lumineux, et ébranlent l'éther, n'engendrant que des ellipses en vertu de leur loi de vibration, il en sera de même des molécules de l'éther : or chaque vibration elliptique achevée sous l'influence d'une force dirigée vers le centre du mouve-

ment et proportionnelle à la distance peut se décomposer en trois vibrations rectilignes, suivant trois plans rectangulaires. Chacune de celles-ci s'accomplira dans le même temps, par l'effet de la même force, et en suivant les mêmes lois à l'égard de la vitesse, du temps et de l'espace. Ainsi chaque vibration elliptique sera déterminée quand on connaîtra la place de la molécule, à un instant quelconque t, en fonction de ses trois coordonnées x, y, z, de manière que, θ étant un arc proportionnel au temps, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\theta + p), \\ y &= b \cdot \cos(\theta + q), \\ z &= c \cdot \cos(\theta + r), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dx}{dt} &= u = \alpha \cdot \sin(\theta + p), \\ -\frac{dy}{dt} &= v = \beta \cdot \sin(\theta + q), \\ -\frac{dz}{dt} &= w = \gamma \cdot \sin(\theta + r). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

En effet, si l'on multiplie la première de ces équations par un coefficient indéterminé l, la seconde par m et la troisième par n, on trouvera, en additionnant,

$$\left.\begin{aligned} lx + my + nz = \cos\theta\,(la \cdot \cos p + mb \cdot \cos q + nc \cdot \cos r) \\ - \sin\theta\,(la \cdot \sin p + mb \cdot \sin q + nc \cdot \sin r), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et par conséquent, en déterminant l, m et n, par les conditions

$$l\,a \cdot \cos p + m\,b \cdot \cos q + n\,c \cdot \cos r = 0,$$

$$l\,a \cdot \sin p + m\,b \cdot \sin q + n\,c \cdot \sin r = 0,$$

auxquelles on peut toujours satisfaire, puisque ces équations

ne sont que du premier degré, il restera une relation indépendante de θ, qui sera

$$l\,x + m\,y + n\,z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Comme cette équation est celle d'un plan, on en conclura que la courbe caractérisée par les équations (1) et (2) est entièrement planc : or, en éliminant θ entre les équations qui ne contiennent que x et y, il vient

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} - \cos^{-1}\frac{y}{b} = p - q.$$

Prenant les cosinus des deux parts,

$$\frac{x\,y}{a\,b} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} = \cos\,(p - q);$$

opérant les réductions,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \cos\,(p - q) = \sin\,(p - q)^2 . \quad . \quad (5)$$

C'est l'équation d'une ellipse dont le centre est l'origine des x et des y. On tombera sur un résultat semblable en combinant les équations entre x, et z et y et z. Ainsi la courbe représentée par les trois équations entre x, y, z et θ, a des ellipses pour projections sur les trois plans rectangulaires : elle doit donc être aussi une ellipse.

619. — Supposons maintenant que deux systèmes d'ondes, ou deux rayons ayant même direction, interfèrent ensemble : en accentuant les lettres des formules (1) pour représenter les quantités analogues du second système, il viendra

$$\left.\begin{aligned} X &= x + x' = a \cdot \cos\,(\theta + p) + a' \cdot \cos\,(\theta + p'), \\ Y &= y + y' = b \cdot \cos\,(\theta + q) + b' \cdot \cos\,(\theta + q'), \\ Z &= z + z' = c \cdot \cos\,(\theta + r) + c' \cdot \cos\,(\theta + r'). \end{aligned}\right\} (6)$$

On calculerait de la même manière les vitesses $u + u'$, $v + v'$, $w + w'$, en supposant, comme dans le cas de deux rayons semblables,

$$a \cos(\theta + p) + a' \cos(\theta + p') = A \cos(\theta + P);$$

le développement donne alors

$$(a \cdot \cos p + a' \cdot \cos p') \cos\theta - (a \cdot \sin p + a' \sin p') \sin\theta$$

$$= A \cos P \cos\theta - A \sin P \sin\theta;$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \tan P &= \frac{a \cdot \sin p + a' \cdot \sin p'}{a \cdot \cos p + a' \cdot \cos p'}, \\ A &= \frac{a \cdot \sin p + a' \cdot \sin p'}{\sin P} \end{aligned}\right\} (7)$$

ou

$$A = \sqrt{a^2 + 2\, a\, a' \cdot \cos(p - p') + a'^2}.$$

On a donc la valeur de X par l'équation

$$X = A \cdot \cos(\theta + P),$$

et l'on trouverait pareillement celles de Y et de Z par les équations analogues

$$Y = B \cdot \cos(\theta + Q), \quad Z = C \cdot \cos(\theta + R).$$

Les expressions des vitesses s'obtiendraient par la même méthode.

620. — Les règles connues de composition et de décomposition peuvent donc s'appliquer également aux vibrations dissemblables. Chaque vibration doit se résoudre en trois autres, qui ont lieu en ligne droite et dans trois plans rectangulaires : celles-ci doivent être composées séparément, de manière à donner d'autres vibrations rectilignes dans les plans coordonnés. Le système de ces dernières représentera

la vibration elliptique résultante, et leur période sera la même que celle des vibrations composantes.

En suivant une marche inverse, une vibration quelconque peut se résoudre en autant d'autres que l'on voudra, qui auront toutes la même période.

621. — Il se présente maintenant une foule de cas, dont nous discuterons les plus importants, en commençant par celui de l'interférence des vibrations rectilignes.

Puisque le choix des plans coordonnés est arbitraire, prenons celui des deux vibrations pour plan des x, y : ce plan sera nécessairement celui de la vibration résultante.

On peut donc poser

$$z = 0 \text{, ou } c = 0, \; c' = 0,$$

et prendre simplement

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos(\theta + p), \quad y = b \cdot \cos(\theta + p). \\ x' &= a' \cdot \cos(\theta + p'), \quad y' = b' \cdot \cos(\theta + p'). \end{aligned}\right\} (8)$$

$\frac{x}{y}$ et $\frac{x'}{y'}$ étant des constantes dans ce cas, et X, Y, A, B, P, Q, ayant la même signification que dans le cas général, on a

$$X = A \cdot \cos(\theta + P), \quad Y = B \cdot \cos(\theta + Q);$$

ce qui donne, en éliminant θ,

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y}{B}\right)^2 - 2\cos(P - Q)\frac{X}{A}\frac{Y}{B} = \sin(P - Q)^2. \quad (9)$$

La vibration résultante est donc généralement elliptique.

622. — L'ellipse dégénère en ligne droite par l'évanouissement de son petit axe, quand $P = Q$: on a alors

$$\text{tang } P = \text{tang } Q,$$

ou

$$\frac{a \cdot \sin p + a' \cdot \sin p'}{a \cdot \cos p + a' \cdot \cos p'} = \frac{b \cdot \sin p + b' \cdot \sin p'}{b \cdot \cos p + b' \cdot \cos p'}.$$

Cette équation se réduit à

$$\left(\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b}\right) \sin (p - p') = 0.$$

Il n'y a conséquemment que deux cas où la résultante est une ligne droite : le premier lorsque $p - p' = 0$, c'est-à-dire quand les vibrations composantes ont une origine commune et s'accordent parfaitement ; le second lorsque $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, c'est-à-dire lorsqu'elles ont lieu dans un même plan et dans la même direction. En effet, désignant par m, m', les amplitudes, et par ψ, ψ', les angles que forment les vibrations avec l'axe des x, on a

$$a = m \cdot \cos \psi, \quad b = m \cdot \sin \psi,$$
$$a' = m' \cdot \cos \psi', \quad b' = m' \cdot \sin \psi';$$

de manière que l'équation dont il s'agit revient à

$$\text{tang}\, \psi = \text{tang}\, \psi' \quad \text{ou} \quad \psi = \psi'.$$

623. — Dans le premier des deux cas précédents, puisque $\cos (p - p') = 1$,

$$A = a + a', \quad B = b + b', \quad P = p, \quad Q = q,$$

et finalement

$$\frac{Y}{X} = \frac{b + b'}{a + a'} = \text{tang}\, \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

C'est la tangente de l'angle entre la vibration rectiligne et l'axe des x.

624. — En nommant M l'amplitude de cette vibration, il vient

$$M \cdot \cos \varphi = A, \quad M \cdot \sin \varphi = B :$$

par conséquent

$$M^2 = A^2 + B^2.$$

Or

$$A^2 = (a + a')^2 = (m \cdot \cos \psi + m' \cdot \cos \psi')^2,$$

$$B^2 = (b + b')^2 = (m \cdot \sin \psi + m' \cdot \sin \psi')^2.$$

Ajoutant ces valeurs et réduisant,

$$M^2 = m^2 + 2\, m m' \cos (\psi - \psi') + m'^2. \quad (11)$$

Comme $\psi - \psi'$ est l'angle entre les vibrations composantes, cette équation signifie aussi que l'amplitude de la vibration résultante est la diagonale du parallélogramme dont les côtés sont les amplitudes des composantes. Il est aisé de démontrer, en substituant les valeurs précédentes de $a + a'$, $b + b'$, dans l'équation (10), que la diagonale a aussi la même direction que la résultante.

625. — *Corollaire* 1. Toute vibration rectiligne peut se décomposer en deux autres, également rectilignes, dont les amplitudes sont les côtés d'un parallélogramme dont la diagonale représente l'amplitude de la résultante : toutes ces vibrations s'accordent parfaitement, c'est-à-dire qu'elles ont la même origine.

626. — *Coroll.* 2. Toute vibration rectiligne peut donc se décomposer suivant deux axes rectangulaires (ou trois au plus), par la règle du parallélogramme des forces, et les vibrations composantes, quelque nombreuses qu'elles puissent être, seront en état d'accord parfait avec la résultante.

627. — L'ellipse dégénère en cercle lorsque

$$\cos (\mathrm{P} - \mathrm{Q}) = 0 ,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\mathrm{P} - \mathrm{Q} = 90^\circ ,$$

ou bien quand

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}.$$

La première condition donne

$$\operatorname{tang} \mathrm{P} + \cot \mathrm{Q} = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a \cdot \sin p + a' \cdot \sin p'}{a \cdot \cos p + a' \cdot \cos p'} + \frac{b \cdot \cos p + b' \cdot \cos p'}{b \cdot \sin p + b' \cdot \sin p'} = 0 ,$$

ou, en réduisant,

$$\left.\begin{aligned} \cos (p - p') &= - \frac{ab + a'b'}{ab' + a'b} \\ &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot \sin 2\psi + m'^2 \cdot \sin 2\psi'}{mm' \sin (\psi + \psi')} \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (12)$$

La condition $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, ou $\mathrm{A}^2 = \mathrm{B}^2$, donne

$$a^2 + 2 a a' \cdot \cos (p - p') + a'^2 = b^2 + 2 b b' \cdot \cos (p - p') + b'^2 ;$$

d'où l'on tire

$$\left.\begin{aligned} \cos (p - p') &= - \frac{a^2 + a'^2 - (b^2 + b'^2)}{2 a a' - 2 b b'} \\ &= - \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 \cdot \cos 2\psi + m'^2 \cdot \cos 2\psi'}{\cos (\psi - \psi')} . \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

En égalant ces valeurs de $\cos (p - p')$, nous trouvons qu'il doit exister entre a, a', b, b' la relation suivante :

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \right) (a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2) = 0.$$

L'évanouissement du premier facteur ne donne point de

vibrations circulaires, ce facteur étant introduit par la racine négative de l'équation $A^2 = B^2$, qu'il est inutile de considérer. L'autre donne

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 \text{ ou } m = m' ;$$

ce qui montre que les vibrations composantes doivent avoir la même amplitude. Or, si nous remplaçons a, b, par leurs valeurs $m \,.\, \cos \psi$, $m \,.\, \sin \psi$, et a', b', par $m \,.\, \cos \psi'$, $m \,.\, \sin \psi'$, dans les expressions trouvées plus haut pour $\cos\,(p - p')$, il viendra

$$\cos(p - p') = -\cos(\psi - \psi'), \text{ ou } p - p' = 180° - (\psi - \psi').$$

Ainsi deux vibrations rectilignes égales peuvent produire par leur interférence une vibration circulaire, pourvu que la différence de leurs phases soit le supplément de l'angle entre leurs directions; de manière qu'à l'instant où la molécule commence à se mouvoir vers le centre, en vertu de la première vibration, elle s'en éloigne en formant un angle obtus avec cette direction, en vertu de la seconde.

Corollaire. Si deux vibrations ont la même amplitude, mais que leurs phases diffèrent d'un quart d'ondulation, la vibration résultante sera circulaire.

628. — Nous sommes en état maintenant d'expliquer ce que deviennent les parties des ondes secondaires qui divergent obliquement des molécules des ondes principales (art. 595), et la manière dont celles qui ne concourent pas avec ces dernières ondes se détruisent mutuellement.

Considérons la surface d'une onde quelconque A B C (fig. 130) comme formée de molécules vibrantes *qui se trouvent toutes dans la même phase de vibration* : le mouvement d'un point quelconque X sera le même, s'il est regardé comme provenant du mouvement particulier de S, ou de tous les mouvements dirigés vers ce point, à partir de toutes les molécules de la surface.

Concevons la surface A B C divisée en une infinité de

portions élémentaires, telles que la différence des distances au point X de deux éléments consécutifs soit constante ou égale à df, en nommant f une de ces distances prise arbitrairement.

Soient AB, BC, CD, etc., ab, bc, cd, etc., des portions finies de la surface, contenant chacune le même nombre de ces éléments, et telles que la valeur correspondante de f soit, pour chacune, plus grande d'une demi-ondulation $(\frac{1}{2}\lambda)$ que pour la portion précédente : ainsi, par exemple,

$$BX = AX + \tfrac{1}{2}\lambda,\ CX = BX + \tfrac{1}{2}\lambda, \text{ etc.}$$

Il est évident que les vibrations qui parviennent en X simultanément des parties correspondantes de deux portions consécutives, comme AB et BC, sont dans des phases totalement opposées ; conséquemment, si leurs intensités et directions étaient les mêmes, elles se détruiraient en interférant. Or l'intensité dépend de la grandeur des éléments de l'onde et de la loi de propagation latérale. Quant à la direction, on ne peut guère l'assigner *à priori*; mais tous les phénomènes qui se rattachent à la lumière indiquent un décroissement d'intensité très rapide, quand la direction des ondulations secondaires s'écarte de celle des ondulations primitives. Quant à l'intensité, il est clair que les éléments adjacents à la perpendiculaire, et qui correspondent à un accroissement donné df de la distance comptée à partir de X, sont beaucoup plus grands que ceux qui sont plus éloignés de cette droite; de manière que tous les éléments de la portion AB sont beaucoup plus grands que ceux de BC, et ainsi de suite : ainsi le mouvement communiqué à X par un des éléments de AB surpassera celui qui serait donné par BC, etc. Le mouvement transmis en G par les éléments qui correspondent à ce point sera donc représenté par une série telle que

$$A - B + C - D + E - F + \text{etc.},$$

dans laquelle chaque terme surpasse celui qui le suit. On

remarquera que ces termes approchent rapidement de l'égalité : en effet, si l'on considère deux éléments correspondants, tels que M, N, à une distance de A assez considérable, les angles X M et X N sont presque égaux ; de sorte que l'obliquité de l'onde secondaire par rapport à l'onde principale, et par conséquent son intensité relative, sont à peu près les mêmes pour les deux éléments.

Les triangles élémentaires M *m o*, M *n p*, étant, dans ce cas, d'une similitude presque parfaite, et ayant les côtés *m o*, *n p*, égaux par hypothèse, les éléments M, N, sont aussi très près d'être égaux à une certaine distance de la perpendiculaire. Enfin les lignes M X, N X, se rapprochent de plus en plus dans la même direction, jusqu'à produire une interférence complète, lorsque leur distance de A devient encore plus considérable.

629. — Nous voyons donc que les termes qui se trouvent à une certaine distance du commencement de la série A — B + C — D, etc., n'ont que très peu d'influence sur sa valeur. Comme le même raisonnement peut s'appliquer aux portions A B, B C, etc., l'effet total sera tel, que le mouvement de la molécule X dépendra entièrement de celui de la partie de l'onde A B C qui la touche immédiatement, et que les effets des vibrations secondaires provenant de parties éloignées seront compensés par l'interférence.

630. — Il est évident que, dans le cas de la réfraction ou de la réflexion, l'on peut substituer à l'onde A M la surface dirimante ou réfléchissante, et à la perpendiculaire X A le rayon réfracté primitif. Voyez, dans le *Bulletin de la société philomatique*, octobre 1821, le mémoire de Fresnel, intitulé *Explication de la réfraction dans le système des ondes*.

631. — Ce qui précède s'applique également au cas où la partie de l'onde dont les vibrations se propagent vers X n'est pas

limitée, ou du moins lorsqu'elle est tellement considérable, que le dernier terme de la série A — B + C — etc. est excessivement petit par rapport au premier. Si, au contraire, l'onde est totalement interceptée par un obstacle qui n'en laisse passer qu'une petite partie autour de A, le cas sera très différent. Dans cette dernière hypothèse, il est aisé d'exprimer par une intégrale l'intensité du mouvement ondulatoire de X, comparée à celle de ce même mouvement sans l'obstacle.

Soient $d^2 s$ la grandeur d'un des éléments en vibration qui constituent la surface, $MX = f$ la distance de cet élément au point X, et $\varphi(\theta)$ une fonction de l'angle entre la vibration qui diverge latéralement et la vibration directe. Cette fonction devant exprimer l'intensité relative de cette vibration latérale, $\varphi(\theta)$ sera $= 1$ quand $\theta = 0$, et diminuera très rapidement à mesure que θ croîtra davantage.

Dénotant par t le temps écoulé depuis une époque déterminée, par λ la longueur d'une ondulation, et posant

$$SA = a,$$

la phase d'une vibration arrivant en X par la route SMX sera

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+f}{\lambda}\right).$$

La vitesse qui en résultera en X sera représentée par

$$\alpha \cdot d^2 s \cdot \varphi(\theta) \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+f}{\lambda}\right),$$

et le mouvement total aura pour expression

$$\iint \alpha \cdot d^2 s \cdot \varphi \cdot (\theta) \cdot \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{a+f}{\lambda}\right),$$

en prenant l'intégrale entre les limites de l'ouverture.

632. — *Corollaire.* Si la partie de l'onde qui traverse n'est que très petite, comme dans le cas d'un rayon que l'on fait

passer au travers d'un petit trou, et que l'on reçoit sur un écran, θ et $\varphi(\theta)$ sont presque constantes, et le mouvement reçu par X est représenté par

$$\alpha \cdot \varphi(\theta) \cdot \int\int d^2 s \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+f}{\lambda}\right).$$

Nous reviendrons bientôt sur ces expressions.

---

§ IV. — *Des couleurs produites par des lames minces.*

Description des phénomènes. — Anneaux formés entre deux verres convexes. — Ordre de succession des couleurs. — Largeurs des anneaux. — Rapport invariable entre les couleurs et les épaisseurs des lames. — Effets de l'obliquité de l'incidence. — Anneaux vus à travers un prisme. — Franges qui paraissent quand on pose un prisme sur un verre plan. — Phénomènes produits par la lumière homogène. — Les anneaux se contractent d'autant plus que les rayons sont plus réfrangibles.—Analyse des anneaux colorés.—Synthèse des anneaux colorés.—Synthèse des divers ordres des couleurs. — Dégradation des teintes. — Couleurs réfléchies par des plaques de différentes matières ; — par des bulles de savon, etc. — Couleurs transmises. — Comment Newton explique les anneaux colorés. — Lois des accès. — Explication des anneaux quand la lumière est homogène ; — des anneaux produits par la lumière blanche ; — de la dilatation des anneaux quand l'incidence est oblique ; — des anneaux transmis. — Explication des anneaux transmis, dans l'hypothèse des ondulations. — Cause des anneaux lucides et des anneaux obscurs dans le cas de la lumière homogène. — Formule générale pour les anneaux transmis. — Expression algébrique des teintes transmises dans le cas de la lumière blanche. — Cas de transmission oblique.—Les ondulations sont d'autant plus courtes que les milieux sont plus denses. — Formule générale relative au rayon transmis. — Cas d'une obliquité médiocre. — Pourquoi les anneaux s'élargissent. — La règle de Newton est en défaut quand l'obliquité est très grande ; pourquoi. — Cause des anneaux réfléchis. — Perte d'une demi-ondulation ; cette hypothèse n'est point contraire aux lois de la dynamique, ni au système ondulatoire. — Expérience décisive entre les deux théories.

633. — On connaît les couleurs brillantes qui se manifestent à la surface des bulles de savon, les teintes irisées que la chaleur donne à l'acier et au cuivre poli, les franges colorées que présentent les fentes d'un verre fêlé, ou les lames de

certains minéraux fossiles, comme le spath d'Islande, le mica, le sulfate de chaux, etc. Si l'on examine ces franges avec attention, on trouvera qu'elles consistent en une série régulière de teintes disposées dans le même ordre, et qu'elles ne dépendent nullement de la couleur du milieu dans lequel elles sont formées, ou dont elles couvrent la surface, mais uniquement de l'épaisseur des lames. Ainsi une bulle de savon, placée sous un verre pour la préserver du vent, paraît blanche d'abord quand elle est exposée à la lumière du jour ordinaire; mais, à mesure qu'on l'enfle, la coloration devient de plus en plus vive, surtout à la partie supérieure, où la bulle est toujours plus mince. Les couleurs se disposent en zones concentriques horizontales, à partir du sommet, qui devient entièrement *noir* si la bulle devient très mince, c'est-à-dire que ce point perd tout son pouvoir réfléchissant : alors la bulle crève subitement, la cohésion au sommet n'étant plus assez forte pour contrebalancer l'attraction latérale des autres parties.

634. — Comme il est assez difficile de faire des observations régulières sur un corps aussi mobile et aussi fragile qu'une bulle de savon, on préfère la méthode suivante pour étudier ce genre de phénomènes. On pose une lentille convexe et bien polie, dont le foyer est très éloigné, sur un plateau de verre, ou sur un verre concave un peu moins courbe que la lentille qui repose dessus, de manière que celle-ci ne touche le verre qu'en un seul point, et que les intervalles qui séparent les surfaces autour de ce point de contact soient extrêmement petits. Si les surfaces ont été soigneusement essuyées avant leur réunion, et qu'on les expose, devant une fenêtre, à la lumière du jour, le point de contact paraîtra comme une tache noire entourée d'anneaux colorés, au milieu de l'image du ciel qui se réfléchira sur les surfaces. Un verre, de dix ou douze pieds de foyer, posé sur une glace, convient parfaitement pour cette observation. Si l'on se sert

d'une lentille dont le foyer soit plus court, il faudra regarder les anneaux à la loupe.

Voici les phénomènes observés :

PHÉNOMÈNE I.

635. — Quels que soient les verres dont on fait usage, les couleurs se succèdent toujours dans le même ordre, à partir de la tache noire, pourvu que la lumière incidente soit blanche.

Premier anneau ou premier ordre des couleurs.

Noir, bleu très pâle, blanc vif, jaune, orangé, rouge.

Deuxième anneau ou deuxième ordre.

Pourpre sombre ou plutôt violet, bleu, vert (jaunâtre), beau jaune, rouge cramoisi.

Troisième anneau ou troisième ordre.

Pourpre, bleu, vert de pré vif, jaune brillant, rose, cramoisi.

Quatrième anneau ou quatrième ordre.

Vert (terne et bleuâtre), rose pâle et jaunâtre, rouge.

Cinquième anneau ou cinquième ordre.

Vert pâle et bleuâtre, blanc, rose.

Sixième anneau ou sixième ordre.

Vert pâle et bleuâtre, rose pâle.

Septième anneau ou septième ordre.

Vert très pâle et bleuâtre, rose très pâle.

Ici les couleurs s'affaiblissent tellement qu'on peut à peine les distinguer du blanc.

636. — On peut remarquer, à ce sujet, que le vert du troi-

sième ordre est le seul qui soit d'une couleur pleine et bien pure; celui du second ordre est presque imperceptible, et celui du quatrième est sombre et tirant sur le vert-pomme. Le jaune est bien prononcé dans le second et le troisième ordres, mais surtout dans le second, où il est très brillant; celui du premier ordre est plutôt couleur de feu et passe à l'orangé. Le bleu est très pâle et à peine sensible dans le premier ordre; dans le second il est plein et brillant, mais il l'est beaucoup moins dans le troisième. Le rouge du premier ordre mérite à peine ce nom, car c'est une couleur de brique fort terne; celui du second et du troisième est vif et plein; mais tous ces rouges tirent sur le cramoisi, et aucun n'a la teinte de l'écarlate ou du rouge prismatique.

Phénomène II.

637. — Les largeurs des anneaux sont inégales : elles décroissent, et les couleurs se rapprochent davantage, à mesure que l'on s'éloigne du centre. Newton, à qui l'on doit la description exacte et la discussion de ces phénomènes, a trouvé, par des mesures directes, que les diamètres des anneaux les plus sombres (c'est-à-dire des anneaux pourpres) sont comme les racines carrées des nombres pairs, 0, 2, 4, 6, etc., en regardant la tache noire comme un anneau, et en saisissant l'instant précis où elle commence à paraître par l'effet de la pression. Les diamètres des anneaux brillants de toutes les couleurs sont comme les racines carrées des nombres impairs, 1, 3, 5, 7, etc. Les surfaces en contact étant des sphères, d'un rayon très considérable en comparaison des diamètres des anneaux, il s'ensuit que les intervalles entre les surfaces aux points les plus obscurs et aux plus brillants, croissent comme les nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, etc. Quand on connaît les rayons de courbure des surfaces en contact, cette loi fait connaître les grandeurs absolues des intervalles en question. En effet, si r et r' représentent les rayons de courbure, et D le diamètre d'un anneau quelcon-

que, l'intervalle entre les surfaces sera la différence des sinus-verses de deux arcs de cercle ayant une corde commune D.

Soit A E (fig. 130) le diamètre de la surface convexe A D : l'on a

$$EA : AD :: AD : DB;$$

d'où

$$\frac{AD^2}{AE} = \frac{D^2}{8} r.$$

On trouverait de la même manière

$$B = \frac{D^2}{8} r' :$$

de sorte que

$\frac{1}{8} D^2 (r - r') = DC =$ l'intervalle entre les surfaces au point D.

C'est ainsi que Newton a calculé que l'intervalle au point le plus brillant du premier anneau est d'un 178,000ᵉ de pouce : cette quantité, multipliée respectivement par les nombres pairs 0, 2, 4, 6, etc., donne les épaisseurs de la couche d'air à la circonférence des anneaux sombres, et celles qui correspondent aux anneaux brillants, quand on la multiplie par les nombres 1, 3, 5, etc.

Phénomène III.

638. — Quand les anneaux sont formés entre des sphères d'inégale courbure, ils sont d'autant plus larges que les courbures sont moindres. Si l'on mesure leurs diamètres, et qu'on les compare aux rayons des verres, on trouvera que *la même couleur se reproduit toujours à une distance du centre des anneaux, telle que l'intervalle entre les surfaces y soit d'une grandeur invariable,* pourvu que l'œil soit semblablement placé dans tous les cas. Ainsi le blanc du premier ordre est produit con-

stamment par une épaisseur d'un 178,000e de pouce; le pourpre, qui forme la limite entre le premier et le second ordres, l'est par une épaisseur double de la précédente : il y a donc une relation constante entre la teinte que l'on observe et l'épaisseur de la conche d'air interposée. De plus, si l'on presse les verres inégalement, comme il est aisé de le faire avec des lentilles minces, les anneaux perdent leur figure circulaire, et s'étendent vers la partie où la pression est la plus forte, en formant des espèces de courbes de nivellement, qui suivent tous les points où les surfaces sont équidistantes. Si l'on pose un cylindre sur un plan, les anneaux se changent en lignes droites, rangées parallèlement le long de la droite de contact, mais en suivant la même loi par rapport à celle-ci que les anneanx par rapport au point noir. Si les verres sont d'une courbure irrégulière, comme des carreaux de vitre, les bandes colorées suivent toutes leurs inégalités. Bien plus, si la pression diminue graduellement, en sorte que les verres se desserrent peu à peu, la tache noire se rétrécit et finit par s'effacer entièrement. Chaque anneau se réduit successivement à un point jusqu'au moment de la séparation des verres.

Il résulte de tous ces phénomènes que c'est uniquement la distance entre les surfaces qui détermine la couleur d'un anneau.

Phénomène IV.

639. — Nous avons toujours supposé que la position de l'œil ne variait pas, c'est-à-dire que l'*angle d'obliquité* restait le même ; mais si l'on abaisse ou qu'on élève l'œil ou les verres, les diamètres des anneaux, et non leurs coulenrs, varient en conséquence. Quand l'œil est plus bas, les anneaux paraissent plus larges, et la même teinte, qui correspondait auparavant à un intervalle d'un 178,000e de pouce, correspond alors à une plus grande épaisseur : cet intervalle (d'un 178,000e de pouce) a été déterminé dans l'hypothèse d'une

incidence perpendiculaire, et observé à peu près sous cette incidence. Pour de très grandes obliquités, cependant, les diamètres des anneaux ne dépassent pas un certain degré de dilatation, et les expériences de Newton lui ont suggéré la règle suivante :

L'intervalle entre les surfaces, correspondant à une teinte proposée, est proportionnel à la sécante de l'angle dont le sinus est le premier terme d'une suite de cent six moyens arithmétiques entre les sinus d'incidence et de réfraction, en commençant par le plus grand sinus, et en supposant que la lumière passe de l'air ou d'un autre milieu dans le verre.

Pour énoncer cette règle dans le langage algébrique, nommons μ l'indice de réfraction relatif, θ l'angle d'incidence, ρ celui de réfraction en passant d'un milieu plus rare dans un plus dense, t l'intervalle correspondant à la teinte donnée pour l'obliquité θ, T cet intervalle pour l'incidence perpendiculaire : nous aurons

$$t = \text{T} \,.\, \text{séc}\, u\,, \quad \sin u = \sin\theta - \frac{1}{107}(\sin\theta - \sin\rho)\,;$$

mais

$$\sin\rho = \frac{1}{\mu} \,.\, \sin\theta \,:$$

donc

$$\sin u = \frac{106 + \frac{1}{\mu}}{107} \,.\, \sin\theta = \frac{106\,\mu + 1}{107\,\mu} \,.\, \sin\theta.$$

640. — Pour observer les anneaux commodément sous de très grandes obliquités, on peut se servir d'un prisme posé sur une lentille convexe, comme dans la fig. 132. Si l'œil se trouve en K, la série d'anneaux formés autour du point de contact E est vue dans la direction KH; et, quand l'œil descend vers I, où le rayon IG commence à se réfléchir to-

talement, les anneaux s'élargissent beaucoup. Dès que l'œil est en I, la moitié supérieure des anneaux disparaît, probablement par l'effet de l'iris prismatique de l'art. 555; mais la tache noire et l'autre moitié subsistent. Si l'œil descend davantage, les anneaux disparaissent, et l'on voit le centre comme une ouverture au milieu de la surface argentée que produit la réflexion totale à la base du prisme; ce point paraît beancoup plus grand aussi que lorsque l'œil est en KH. Ce phénomène prouve que le défaut de réflexion s'étend au-delà des limites du *contact absolu* des verres, et que, par conséquent, l'action de la surface inférieure se combine avec celle de la surface supérieure, et empêche la réflexion, lors même qu'il y a un espace fini, très petit, à la vérité, entre les surfaces.

Euler a tiré de ceci un argument contre la théorie ondulatoire; mais son objection n'est pas fondée, et il est très vraisemblable que le changement de densité ou d'élasticité de l'éther, au dedans et au dehors d'un milieu, ne se fait pas brusqnement, mais par degrés. Si le changement a donc lieu au dehors, le rapprochement de deux milieux, entre les limites où s'opère la condensation de l'éther, doit altérer la loi de réfraction dans l'intervalle qui les sépare.

641. — La méthode suivante, due à sir William Herschel, est très avantagense pour observer les couleurs réfléchies par une couche d'air, quand l'obliquité est très grande. Sur une glace parfaitement plane, ou sur un miroir métallique, on place, devant une fenêtre, un prisme équilatéral dont la basc contiguë à la glace est très unie : en regardant au travers dc la face A C (fig. 133), on verra, comme d'ordinaire, l'iris réfléchi *a, b, c,* dans la direction EF, à l'endroit même où le rayon venant de E se réfléchirait totalement. En deçà de cet iris, et parallèlement à sa direction, l'on voit plusieurs belles franges colorées, dont le nombre et la distance mutuelle varient avec la pression, leur largeur croissant quand la pression augmente, et *vice versa*. Leur formation n'exigc

pas que les surfaces soient extrêmement rapprochées, car on les voit très bien lorsque le prisme est séparé des surfaces inférieures par l'épaisseur d'une feuille de papier ou d'un filament de coton; dans ce dernier cas, elles sont très nombreuses et très rapprochées. Quand la pression est modérée, elles sont à peu près équidistantes entre elles, et semblent se perdre dans le bleu de l'iris, sans devenir sensiblement plus larges dans le voisinage de cet arc. Quand les intervalles entre les surfaces viennent à diminuer, elles se dilatent et descendent vers l'œil, en paraissant provenir de l'iris. Il n'est pas nécessaire que la surface inférieure soit parfaitement polie. Un verre usé à l'émeri, assez grossièrement pour ne pas réfléchir d'image régulière, les développe très bien. L'expérience est si facile, et les phénomènes sont si évidents, qu'on voit avec surprise que Newton ne les a ni observés ni décrits; d'autant plus qu'ils expliquent parfaitement la loi que nous avons rapportée plus haut.

En effet, soient EH, EK, EL (fig. 133), des rayons qui tombent de E sous des angles un peu moindres que celui de réflexion totale à la base : ils seront réfractés, et, après leur émergence en BC, ils se réfléchiront en MN, pourvu que l'obliquité soit assez grande pour que des surfaces dépolies réfléchissent la lumière avec une régularité suffisante (art. 558). Ils suivront alors les routes HDPp, KFQq, LGRr, etc., et rentreront dans le prisme en P, Q, R.

Réciproquement, des rayons tels que pP, qQ, etc., qui tombent en P, Q, etc., arriveront jusqu'en E en traversant l'intervalle BCNM, et chacun affectera l'œil de la couleur qui correspond à son obliquité et à l'intervalle qu'il a franchi entre les surfaces.

Nommant toujours θ l'angle d'incidence (à l'extérieur) du rayon DH à la base du prisme, et posant

$$\sin u = \frac{106\mu + 1}{107\mu} . \sin \theta = \frac{106\mu + 1}{107} . \sin \rho = k . \sin \rho,$$

la couleur qu'on verra dans la direction EH sera la même

(en n'ayant pas égard à la dispersion à la surface A C) que celle qui serait réfléchie par une couche d'air d'une épaisseur

$$T = t \cdot \cos u = t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \rho},$$

en supposant l'incidence perpendiculaire et $t =$ la distance entre les surfaces B C, M N.

On observera donc, dans les diverses situations successives de la ligne E H, une suite de couleurs analogues à celles des anneaux, excepté dans les endroits où la dispersion due à la face A C, altère les couleurs en séparant les rayons qui les composent.

642. — Cependant on ne verra point la série totale des couleurs, parce que celles qui exigent une obliquité plus grande que celle qui est nécessaire à la réflexion totale ne sauraient être formées. En effet, en estimant à partir de la verticale l'angle qui produit la teinte correspondante à l'épaisseur T et donnée par les anneaux, cet angle se déduit de la formule

$$\sin \rho = \frac{1}{k} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{T}{t}\right)^2} = \frac{214}{320} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{t}\right)^2},$$

en prenant $\mu = \frac{3}{2}$ pour le verre, valeur qui approche beaucoup de la véritable.

Or la couleur du centre, ou le noir du premier ordre qui se forme lorsque $T = 0$, exige que

$$\sin \rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{\mu - \frac{\mu - 1}{107}}.$$

Cette valeur, surpassant $\frac{1}{\mu}$, indique que la teinte devrait se trouver au-dessus de l'iris, et qu'elle est conséquemment invisible.

La première couleur paraîtra contre l'iris, où

$$\sin \rho = \frac{1}{\mu} :$$

par conséquent

$$T = t\sqrt{1 - \left(\frac{k}{\mu}\right)^2} = t\sqrt{1 - \left[1 - \left(\frac{\mu - 1}{107\,\mu}\right)\right]^2}$$

$$= t\sqrt{\frac{2(\mu - 1)}{107\,\mu}} = 0.079\,t \text{ à peu près, ou } \frac{t}{12.25}.$$

Ces franges sont donc visibles pour un œil plongé dans le prisme, quand l'intervalle entre la base et le verre qui lui sert d'appui vaut plus que douze fois celui qui est nécessaire à la production des couleurs sous l'incidence perpendiculaire, c'est-à-dire quand il surpasse $12.25 \times \frac{1}{178000}$, ou environ $\frac{1}{1100}$ de pouce; ce qui est à peine l'épaisseur d'une feuille de papier. Nous voyons d'ailleurs, par cette valeur de T, que la première couleur visible immédiatement au-dessous de l'iris s'élève dans la suite des anneaux (c'est-à-dire qu'elle appartient à un point plus rapproché du centre) à mesure que t diminue, ou que le prisme est pressé plus fortement contre le verre; ce qui explique pourquoi les franges deviennent plus nombreuses et mieux détachées de l'iris, quand la pression augmente. Quant à leur largeur angulaire, si nous supposons

$$e = \frac{1 \text{ pouce}}{89000},$$

et l'œil plongé dans le prisme, nous aurons, en désignant par ρ_0, ρ_1, etc., les valeurs de ρ correspondantes aux divers ordres des teintes visibles,

$$\sin \rho_0 = \frac{1}{\mu}, \quad \sin \rho_1 = \frac{1}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{T+e}{t}\right)^2},$$

$$\sin \rho_1 = \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{k^2} \times 0.079 \times \frac{2e}{t}} = \frac{1}{\mu}\left(1 - 0.079 \times \frac{e}{t}\right),$$

(à très peu près),

$$\sin \rho_2 = \frac{1}{\mu}\left(1 - 0.079 \times \frac{2e}{t}\right),$$

et ainsi de suite.

Les sinus des incidences sous lesquelles se développent les couleurs de tous les ordres, depuis l'iris, croissent en progression arithmétique; de manière que les franges doivent être disposées suivant des arcs de cercle parallèles à l'iris, et que leurs largeurs doivent être à peu près égales, et augmenter avec la pression ou en raison inverse de t: toutes ces circonstances sont conformes à l'observation. Cependant la réfraction à la face du prisme entre l'œil et la base dérange tout-à-fait l'ordre des couleurs dans les franges, et multiplie surtout le nombre des alternations. Nous avons cru devoir entrer dans quelques détails sur ces franges, et sur la manière dont elles se rattachent aux phénomènes généraux observés par Newton, parce que jusqu'à présent nous ne les avons jamais vu rigoureusement analysées, et qu'elles nous ont semblé mériter, par leurs belles couleurs, une attention particulière.

En regardant une lumière au travers de la base du prisme et du plateau de verre, de manière à observer l'arc transmis (art. 556), on verra la partie concave garnie de franges colorées du même genre que les précédentes.

PHÉNOMÈNE V.

643. — Si l'on se sert de lumière homogène pour éclairer

les verres, les anneaux paraîtront en bien plus grand nombre, et cela d'autant plus, que la lumière sera plus homogène. Lorsque celle-ci l'est autant que possible, comme lorsqu'on fait usage de la flamme d'une lampe à esprit-de-vin dont la mèche a été imbibée de sel, ainsi que l'a proposé M. Talbot, les anneaux sont réellement innombrables, et s'étendent à une si grande distance, qu'ils deviennent trop rapprochés pour qu'on puisse les compter, ou même les distinguer, à l'œil nu. Même en les regardant à la loupe, il faudrait que le grossissement devînt de plus en plus fort à mesure qu'ils seraient plus rapprochés : ainsi, l'on est forcé de les abandonner au moment où ils disparaissent, sans cependant jamais se confondre. D'ailleurs, vers la fin ils ne sont plus que d'une seule couleur, qui est celle de la lumière homogène, et l'on ne remarque plus que des alternations de lumière et d'obscurité, les intervalles entre les anneaux devenant tout-à-fait noirs.

PHÉNOMÈNE VI.

644. — Quand la lumière que l'on emploie passe d'une couleur homogène à une autre, par exemple quand on éclaire successivement l'appareil avec les différentes couleurs du spectre, en donnant aux rayons incidents une inclinaison telle qu'ils soient toujours réfléchis vers l'œil, qui reste immobile, les anneaux paraissent se dilater et se contracter, suivant la couleur de la lumière éclairante : la lumière rouge donne les anneaux les plus larges, et le violet les moins larges ; les couleurs intermédiaires correspondent à des largeurs entre ces deux limites. Newton s'est assuré, par la mesure des diamètres, que l'intervalle entre les surfaces, ou l'épaisseur de la couche d'air où se forme un anneau violet d'un certain ordre, est à l'épaisseur où se forme un anneau rouge du même ordre dans le rapport de 9 à 14 environ. Déterminant par cette méthode l'épaisseur de la couche d'air où se produit la partie la plus brillante du premier anneau, quand on emploie successivement toutes les couleurs du spectre, depuis

le rouge extrême jusqu'au violet extrême, il a trouvé que ces épaisseurs, exprimées en parties de pouce, sont les moitiés des nombres qui occupent la seconde colonne de la table, art. 575, et qu'elles répondent aux valeurs de $\frac{\lambda}{2}$, c'est-à-dire à la longueur d'une demi-ondulation pour chaque rayon.

645. — Le phénomène précédent peut être regardé comme l'analyse de ce qui arrive quand on observe les anneaux à la lumière blanche. En effet, dans ce cas, on peut les considérer comme formés par la superposition de plusieurs séries d'anneaux de couleurs simples, dont chacune a une suite particulière de diamètres. Quant à la manière dont se fait cette superposition ou *synthèse* des divers ordres des couleurs, on peut s'en former une idée en consultant la figure 134, dans laquelle les abscisses, ou les droites horizontales, représentent les épaisseurs de la couche d'air entre deux verres, en supposant que celles-ci croissent uniformément, et RR', RR", etc., les diverses épaisseurs auxquelles le rouge disparaît dans les anneaux produits par la lumière rouge employée seule, c'est-à-dire les intervalles noirs entre ces anneaux. R*r*, R*r'*, R*r"*, etc., représentent les épaisseurs qui correspondent aux anneaux les plus brillants.

De la même manière, soient OO', OO", etc., les épaisseurs auxquelles il n'y a pas d'orangé, et ainsi de suite pour le jaune, le vert, le bleu, l'indigo et le violet : RR', OO', YY', etc., seront entre elles comme les nombres de la colonne 2, article 575.

Si l'on décrit alors une suite de courbes onduleuses, comme dans la fig. 134, et que, par un point quelconque, tel que C sur AE, l'on tire une parallèle à AV qui coupe toutes ces courbes, les différentes ordonnées, ou les parties de cette ligne interceptées entre les courbes et leurs abscisses, représenteront l'intensité de la lumière de chaque couleur, qu'une couche d'air de l'épaisseur donnée réfléchirait vers l'œil.

Ainsi la couleur correspondante à une épaisseur donnée

sera le résultat du mélange de plusieurs rayons simples, dont le nombre sera proportionnel à la longueur de l'ordonnée de chaque couleur composante.

646. — La figure étant disposée en échelle, on peut s'en servir pour reconnaître la couleur en un point quelconque. D'abord, lorsque l'épaisseur est o, c'est-à-dire à l'origine A, toutes les ordonnées s'évanouissent, et ce point est nécessairement noir. Quoique l'épaisseur de la couche d'air croisse continuellement depuis o, elle n'en reste pas moins fort petite, tandis que les ordonnées des différentes courbes augmentent très inégalement, celles qui appartiennent aux rayons les plus réfrangibles croissant beaucoup plus vite que les autres; de manière que la première couleur que l'on aperçoit correspond à une très petite épaisseur A 1, et contient un excès de bleu qui constitue le bleu faible, mais pur, du premier ordre (art. 635). Pour une épaisseur un peu plus grande, telle que A 2, l'ordonnée commune passe très près des ordonnées maxima de toutes les courbes; elle est un peu en-deçà de celle du rouge et au-delà de celle du violet. Cependant la différence est si faible que les couleurs sont à peu près dans la proportion nécessaire pour former le blanc; et, comme elles sont près de leur maximum, elles doivent produire une teinte blanche très brillante. Ce résultat est conforme à l'observation, le blanc du premier ordre étant en effet la couleur la plus éclatante. Plus loin, le violet décroît rapidement, le rouge augmente, et le jaune est près de son maximum; de manière qu'à l'épaisseur A 3 le blanc passe au jaune. En A 4, le violet, l'indigo, le bleu et le vert, s'évanouissent; le jaune s'affaiblit, l'orangé et surtout le rouge augmentent considérablement; d'où résulte une teinte orangée, ou plutôt couleur de feu, qui devient de plus en plus rouge.

C'est en B que se trouve l'ordonnée minimum pour le jaune, c'est-à-dire pour les rayons les plus lumineux : c'est là que sera donc la teinte la plus sombre, qui se composera d'un peu

d'orangé, de vert, de bleu et même d'indigo; mais l'addition d'un peu de violet ou de rouge produira un pourpre sombre et violâtre, qui passera promptement au bleu vif correspondant à l'épaisseur A 5, puisque les rayons les plus réfrangibles tendent à dominer en cet endroit, tandis que les autres diminuent. En 6, où l'ordonnée traverse le jaune maximum, il y a très peu de rouge, peu d'orangé, beaucoup de vert, peu de bleu; l'indigo et le violet y sont à peine sensibles : la teinte sera donc d'un jaune verdâtre; mais, comme le vert diminue et que l'orangé augmente, le jaune perdra bientôt sa nuance verte pour devenir pur et brillant. En 7, les rayons prédominants seront orangés et jaunes; ils s'y trouveront en si grande abondance, que le peu de rouge et de violet qui s'y trouvera mêlé n'altérera point la pureté de la couleur, qui sera un jaune très prononcé. En 8 on trouvera un cramoisi magnifique, dû au mélange de beaucoup d'orangé et de rouge avec de l'indigo et du violet. En C l'on trouvera encore le jaune à son minimum; mais, comme le rouge et l'indigo y sont en même temps à leur maximum, ce point, quoique sombre en comparaison de ceux qui l'entourent, se fera remarquer par une belle teinte rouge pourpre. En 9 et en 10 on voit l'origine du vert vif du troisième ordre, dû à un mélange de vert, de jaune et de bleu, pour le premier point, et à la réunion du jaune, du vert et du violet, pour le second; le rouge et l'orangé y manquent presque entièrement.

En continuant de la même manière, on reproduirait avec la plus grande exactitude toutes les teintes énumérées à l'article 635.

647. — Quand l'épaisseur augmente, les rayons doués d'une réfrangibilité à peu près égale diffèrent beaucoup en intensité, puisque la plus légère différence dans les longueurs des bases de leurs courbes, étant répétée plusieurs fois, doit produire à la longue une opposition presque complète; de sorte que le maximum d'un rayon coïncide avec le minimum

d'un autre de même couleur, d'une réfrangibilité presque égale. Ainsi, pour une épaisseur considérable, comme au dixième ou vingtième ordre, on observera deux maxima et deux minima à la fois pour chaque couleur, puisque la couleur ne dépend point d'une certaine réfrangibilité, mais plutôt de tous les degrés de réfrangibilité entre des limites constantes. Conséquemment, à mesure que l'épaisseur augmente, les teintes deviennent de moins en moins pures, jusqu'à ce qu'on n'aperçoive plus qu'un blanc terne et de moitié moins éclatant que celui du premier ordre, qui contient *tous* les rayons à leur *maximum* d'intensité.

Phénomène VII.

648. — Nous avons supposé jusqu'ici l'interposition d'une couche d'air entre les deux verres; cependant ce n'est point ce milieu qui produit les phénomènes, mais l'*espace* qu'il occupe : car, dans le vide d'une machine pneumatique, les anneaux restent sensiblement les mêmes. Mais, quand on interpose un milieu plus réfringent, comme l'eau, l'huile, etc., les anneaux se rétrécissent en conservant leurs couleurs et leurs largeurs relatives.

Newton a trouvé, par des mesures très exactes, que, *pour des milieux quelconques, les épaisseurs auxquelles on aperçoit une teinte donnée sont en raison inverse des indices de réfraction de ces milieux.*

Ainsi le blanc du premier ordre, étant produit dans l'air ou dans le vide à $\frac{1}{178000}$ de pouce, sera produit dans l'eau à $\frac{1}{133.6}$ de cette épaisseur.

Il remarqua aussi que la loi de dilatation des anneaux, quand l'incidence est oblique (art. 639), s'observe toujours, quelle que soit la nature du milieu interposé. Il s'ensuit que dans les milieux denses la dilatation pour de grandes obliquités est beaucoup moindre que dans les milieux rares; et que par conséquent une épaisseur donnée réfléchit une couleur d'autant moins sujette à varier avec l'obliquité que le

milieu est plus réfringent. C'est pourquoi les couleurs d'une bulle de savon varient beaucoup moins avec l'incidence que celles d'une couche d'air, et celles-ci moins que les teintes irisées de l'acier poli, qui proviennent d'un léger oxide produit par la chaleur à la surface du métal.

Phénomène VIII.

649. — Il n'est pas nécessaire, pour obtenir des couleurs, que des surfaces de verre ou d'un autre milieu dense renferment des couches d'un milieu plus rare; les couleurs sont même plus brillantes quand des lames minces d'un milieu dense sont comprises entre des couches d'un milieu rare, comme l'air ou le vide : ainsi des bulles de savon, des lames de mica excessivement minces, etc., présentent la même série de couleurs disposées en franges et variant avec l'épaisseur des lames.

M. Talbot a imaginé l'expérience suivante pour observer facilement les franges formées par des lames de verre d'une épaisseur sensible :

Si l'on enfle une bulle de verre jusqu'à ce qu'elle crève, et qu'on en observe les fragments dans une chambre obscure, à la lueur d'une lampe à esprit-de-vin dont la mèche a été imbibée de sel, ils paraîtront couverts de stries alternativement lumineuses et noires, disposées en couches onduleuses parallèles entre elles et variant avec l'épaisseur du fragment. Quand celle-ci est à peu près uniforme, les stries sont larges; mais, quand elle varie rapidement, elles deviennent tellement serrées qu'elles échappent à l'œil nu et ne peuvent être distinguées qu'à l'aide d'un microscope. En supposant au morceau de verre une épaisseur d'un millième de pouce, les franges correspondraient au quatre-vingt-neuvième ordre environ des anneaux colorés, et serviraient ainsi à démontrer la parfaite homogénéité de la lumière : car, s'il y avait la moindre différence de réfrangibilité, son effet, multiplié par 89, deviendrait sensible par la confusion et l'obli-

tération partielle des espaces noirs. L'épaisseur à laquelle on cesse de distinguer les alternations de la lumière et des couleurs ou du noir est le meilleur moyen de reconnaître le degré d'homogénéité d'une lumière quelconque, et en est réellement la mesure numérique. Cette expérience nous apprend encore que la propriété de la lumière d'où dépend le phénomène des franges n'appartient pas uniquement à des épaisseurs extrêmement petites, mais qu'elle s'observe encore quand la lumière traverse des intervalles assez considérables.

Phénomène IX.

650. — Quand on regarde au travers des lames qui produisent les anneaux colorés, on aperçoit une série d'anneaux colorés transmis, beaucoup plus faibles que les anneaux réfléchis, et composés des teintes complémentaires de ceux-ci; de manière que leur mélange donnerait le blanc. Le centre est blanc, et les couleurs suivantes sont le jaune, le noir, le violet et le bleu : telle est la série du premier ordre. Les couleurs du deuxième ordre sont le blanc, le jaune, le rouge, le violet, le bleu; celles du troisième, le vert, le jaune, le rouge et le vert bleuâtre; après quoi viennent de légères alternations de rouge et de bleu verdâtre, la dégradation des teintes étant beaucoup plus rapide dans les anneaux transmis que dans les anneaux réfléchis.

651. — C'est pour expliquer ces phénomènes que Newton a imaginé sa doctrine des accès de facile réflexion et de facile transmission, dont il a été parlé à la neuvième *demande* de l'art. 526, et que nous allons développer davantage en l'appliquant au cas actuel, ainsi que l'a fait son inventeur. Il faut ajouter alors à l'hypothèse générale les propositions suivantes :

652. — Les intervalles après lesquels les accès se repro-

duisent diffèrent en raison de la réfrangibilité des rayons : les plus grands correspondent au rouge et les moindres au violet ; leurs valeurs sont représentées en fractions de pouce par les moitiés des nombres de la deuxième colonne de la table, art. 575, en supposant que les rayons se trouvent dans le vide et que leur incidence soit perpendiculaire.

653. — Dans d'autres milieux, la longueur des intervalles est diminuée dans le rapport de l'indice de réfraction du milieu à l'unité.

654. — Pour des incidences obliques, c'est-à-dire quand un rayon traverse un milieu dans lequel il pénètre obliquement, les longueurs des accès sont plus grandes que pour l'incidence perpendiculaire : le rapport de ces longueurs à celle que l'on observe dans le cas de cette dernière incidence est celui du rayon au rectangle des cosinus de θ et d'un arc u donné par l'équation

$$\sin u = \frac{106\,\mu + 1}{107\,\mu} \sin \theta.$$

655. — Considérons maintenant ce que devient une molécule lumineuse dont les accès dans un certain milieu ont pour longueur $\frac{1}{2}\lambda$, en concevant qu'elle soit entrée perpendiculairement dans le milieu dont elle vient frapper la seconde surface en traversant l'épaisseur t. D'abord, si l'on suppose que t soit un multiple exact de $\frac{1}{2}\lambda$, il est évident qu'au moment où la molécule atteindra la seconde surface, elle se trouvera dans la même phase d'accès de transmission qu'à l'instant de l'incidence : en effet, elle se trouve absolument dans les mêmes circonstances à l'égard des deux surfaces ; et, puisqu'elle a été transmise une fois, elle doit l'être une seconde. Tout rayon qui tombe perpendiculairement sur une telle lame la traverse, et ne se réfléchit point à la seconde surface.

D'un autre côté, si l'on suppose que l'épaisseur de la lame soit un multiple exact et impair de $\frac{1}{4}\lambda$, etc., chaque molécule qui aura pénétré la première surface se trouvera, au moment de sa rencontre avec la seconde, dans la phase d'accès opposée. Si elle se trouvait d'abord dans un accès de facile transmission, elle sera disposée à se réfléchir en plus ou moins grande partie, selon la nature du milieu et son action générale sur la lumière : car il faut se rappeler que toute molécule dans un accès de facile réflexion n'est pas *nécessairement* réfléchie; elle est seulement disposée à l'être. C'est la nature du milieu et la phase de l'accès qui déterminent le phénomène.

Concevons maintenant que l'œil soit placé à une certaine distance d'une lame d'épaisseur variable, de manière à recevoir les rayons réfléchis dans une direction à peu près perpendiculaire : il est évident qu'en vertu de l'uniformité de la réflexion à la première surface, l'œil recevra de chaque point la même quantité de lumière. Mais il n'en sera pas de même à l'égard des rayons réfléchis par la seconde surface : à tous les points de celle-ci où l'épaisseur est un multiple pair de $\frac{1}{4}\lambda$ il n'y aura pas de réflexion; ce sera le contraire pour les points où l'épaisseur est un multiple impair de cette quantité. Et, puisque chaque molécule réfléchie de cette manière décrit une route égale à celle qui précédait son incidence, c'est-à-dire le même multiple de $\frac{\lambda}{4}$, l'espace total parcouru dans l'intérieur de la lame sera un multiple exact de $\frac{\lambda}{2}$, au moment où la molécule atteindra la première surface, qu'elle traversera par conséquent pour arriver jusqu'à l'œil. La lame paraîtra donc obscure, à cause de la seconde surface seulement, partout où son épaisseur sera

$$0,\ \frac{2\lambda}{4},\ \frac{4\lambda}{4},\ \text{etc.},$$

et lucide partout où cette épaisseur sera

$$\frac{1}{4}\lambda,\ \frac{3}{4}\lambda,\ \frac{5}{4}\lambda, \text{ etc., à l'infini.}$$

Aux épaisseurs intermédiaires elle aura un éclat plus faible; de manière qu'elle paraîtra couverte de franges obscures et lumineuses qui se succéderont, comme on l'observe dans l'expérience précédente, art. 649. L'uniformité de la réflexion à la première surface n'empêchera point de remarquer cette inégalité de lumière.

656. — En prenant pour abscisses d'une courbe les épaisseurs de la lame, et pour ordonnées les diverses intensités de la lumière réfléchie par la seconde surface et traversant de nouveau la première, cette courbe sera onduleuse, comme celles de la fig. 134, et touchera l'axe des abscisses à des distances égales entre elles et à la longueur d'un accès entier de la couleur que l'on aura choisie. Or ces distances, pour des rayons de couleur différente, étant supposées les mêmes qu'à l'art. 652, la construction rapportée à l'art. 645 peut s'y appliquer. Ainsi, quand une lame reçoit de la lumière blanche, sa seconde surface réfléchit une série de couleurs dont nous avons déjà démontré la composition, et telles qu'on les observe réellement, à cela près qu'elles sont affaiblies par la lumière blanche réfléchie uniformément par tous les points de la première surface.

Si la lame, au lieu d'être vide à l'intérieur, était un milieu réfringent, les teintes se succéderaient de la même manière; mais les épaisseurs auxquelles elles se produiraient seraient à celles d'une lame vide dans le rapport des accès relatifs aux deux cas, c'est-à-dire comme l'unité serait à l'indice de réfraction du milieu. Ainsi les anneaux formés par une couche d'air comprise entre deux objectifs doivent se contracter quand à ce gaz on substitue de l'eau, de l'huile, etc. : en effet, l'expérience démontre que ce rétrécissement est proportionnel au rapport précité.

657. — Pour des incidences obliques, θ étant l'angle sous lequel le rayon passe dans la lame, t séc θ est la route totale du rayon entre la première et la seconde surface. Puisque $\frac{1}{2}\lambda$. séc θ . séc u est la longueur des accès pour cette obliquité, la molécule lumineuse doit avoir surmonté le même nombre d'accès pendant cette route, pour arriver à la seconde surface dans la même phase, et pour être réfléchie sans rien perdre de son intensité : nous devons donc avoir

$$\frac{2\,t\,.\,\text{séc}\,\theta}{\lambda\,.\,\text{séc}\,\theta\,.\,\text{séc}\,u} = \text{constante},$$

ou t proportionnel à séc u ; ce qui est conforme à l'observation.

658. — Toute la lumière qui n'est pas réfléchie à la seconde surface la traverse, et forme une série de couleurs transmises : celles-ci se composent donc de toute la lumière incidente ($= 1$), moins celle qui est réfléchie par les deux surfaces.

Nous désignerons par a (qui sera toujours une fraction assez petite) la quantité de lumière réfléchie par la première surface, et nous regarderons celle qui est réfléchie par la seconde comme une fonction périodique dont le minimum $= 0$, et dont le maximum ne peut jamais surpasser a, parce que la réflexion à la seconde surface d'un milieu ne saurait être plus forte qu'à la première, sous l'incidence perpendiculaire. On peut la représenter par

$$a\,.\left(\sin\frac{2\,t}{\lambda}\right)^2,$$

et l'intensité de la couleur particulière que l'on considère aura pour expression

$$1 - a\left[1 + \sin\left(\frac{2\,t}{\lambda}\right)^2\right]$$

dans la série des rayons transmis, et

$$a\left(\sin\frac{2t}{\lambda}\right)^2$$

dans celle des rayons réfléchis.

On voit par là qu'en raison de la petitesse de a, la différence entre les parties obscures et les parties lucides doit être faible dans les anneaux transmis, en comparaison de la lumière totale, que nous supposons homogène; et qu'ainsi elle doit être beaucoup moins sensible que dans les anneaux réfléchis. Quand la lumière incidente est blanche, les teintes vues par transmission sont pâles et lavées.

659. — La discussion précédente nous fait voir que l'hypothèse des accès fournit une explication satisfaisante des phénomènes relatifs aux anneaux colorés, ou que, plutôt, elle les représente exactement. On a même avancé que cette doctrine n'est réellement pas hypothétique, mais qu'elle n'est que l'expression des faits observés. Il est évident, dit-on, que la seconde surface de la lame renvoie les rayons vers l'œil dans les parties lucides et ne les renvoie point dans les parties obscures : ainsi, dire que la lumière qui a traversé une épaisseur égale à

$$(2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

se réfléchit, et qu'elle ne se réfléchit pas si elle n'a traversé que

$$2n\frac{\lambda}{4},$$

ce n'est qu'énoncer un fait.

Ce raisonnement serait exact si l'on pouvait ne considérer qu'un seul rayon, et si la lumière réfléchie par la première surface pouvait être regardée comme étrangère à la question. Mais, si l'on peut démontrer, dans un autre système, tel que celui des ondulations, par exemple, que la seconde partie de cet argument est sans force, il faudra bien admet-

tre que la doctrine de Newton s'appuie sur quelques hypothèses, et donne dès lors ouverture à la discussion. En effet, quoique la seconde surface puisse réfléchir dans toute son étendue, les rayons qui émanent des points où l'épaisseur est un multiple pair de $\frac{\lambda}{4}$ n'arrivent point jusqu'à l'œil, parce qu'ils sont détruits en chemin par l'interférence de ceux que réfléchit la première surface.

660. — Examinons maintenant comment le système ondulatoire rend compte de ces phénomènes. Nous commencerons par les anneaux transmis, et nous verrons bientôt les motifs de cette préférence.

Un rayon, dont la longueur d'ondulation dans un certain milieu est λ, tombe perpendiculairement sur la première surface d'une lame d'une épaisseur $= t$, dont nous supposerons les surfaces parallèles, afin d'avoir des résultats plus simples. Ce rayon se partagera en deux parties, l'une $(= a)$ réfléchie, et l'autre $(= 1 - a)$ introduite dans le milieu. Soit θ la phase de cette dernière partie au moment où elle atteint la seconde surface : elle s'y partagera encore en deux parties, dont l'une reviendra dans le milieu par réflexion et aura pour valeur

$$(1 - a)\, a,$$

c'est-à-dire, à très peu près, a, cette quantité étant fort petite; et dont l'autre,

$$= (1 - a) - a(1 - a),$$

ou à peu près $1 - 2a$, sera transmise.

Si l'on ne suppose aucune ondulation perdue par l'effet de la transmission ou de la réflexion, ces parties seront toutes deux dans la phase θ : celle qui est réfléchie rencontrera la première surface dans la phase

$$\theta + 2\pi \cdot \frac{t}{\lambda},$$

et s'y réfléchira encore partiellement avec une intensité $= a \times a = a^2$; de là elle reviendra à la seconde surface dans la phase

$$\theta + 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda},$$

et y sera transmise avec une intensité $= (1 - a)\, a^2$ ou a^2 environ. Comme ces réflexions sont toutes perpendiculaires, cette dernière partie se confondra avec $1 - 2a$, qui est transmise sans réflexion.

Posant

$$\alpha = \sqrt{1 - 2a} = 1 - a \text{ environ},$$

$$\alpha' = \sqrt{a^2} = a,$$

α et α' représenteront les amplitudes de vibration de la molécule éthérée à la surface postérieure : son excursion totale sera donc exprimée par

$$\alpha \cdot \cos\theta + \alpha' \cdot \cos\left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right)$$

ou

$$(1 - a)\cos\theta + a\cos\left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right)$$

$$= \cos\theta + a \cdot \cos\left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right) - a\cos\theta.$$

Le premier terme est indépendant de t, et représente le rayon incident tel qu'il arriverait à la seconde surface s'il n'y avait pas de réflexions. Les deux autres représentent deux rayons, dont l'un est évidemment en état d'opposition complète avec l'autre, et le détruit lorsque t est un multiple impair de $\frac{\lambda}{4}$, c'est-à-dire de la moitié de la longueur que Newton attribue aux accès, un accès étant égal à une demi-ondulation, comme nous l'avons déjà remarqué : ainsi le rayon incident doit avoir à son émergence la même inten-

sité que si la lame n'existait pas; mais, si t est un multiple impair d'un demi-accès, la valeur de

$$\cos\left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right)$$

est alors $-\cos\theta$, et le rayon émergent est représenté par

$$(1 - 2a)\cos\theta,$$

c'est à-dire qu'il est égal au rayon incident moins le double de la lumière réfléchie à la première surface.

661. — Si l'épaisseur de la lame varie en différents points, la lumière transmise ne sera pas uniforme; mais elle aura des maxima et des minima alternatifs, correspondants aux épaisseurs

$$0,\ \frac{1\lambda}{4},\ \frac{2\lambda}{4},\ \frac{3\lambda}{4},\ \text{etc.}$$

662. — Si l'on applique à l'expression donnée plus haut la formule générale de l'art. 613, relative à la composition des rayons situés dans un même plan, on trouvera, pour l'intensité A^2 du rayon émergent,

$$A^2 = (1-a)^2 + 2a(1-a)\cos 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda} + a^2,$$

$$= 1 - 4a(1-a)\sin^2\left(2\pi\frac{t}{\lambda}\right),$$

$$= 1 - 4a\sin^2\left(\frac{2\pi t}{\lambda}\right):$$

ce qui fait voir que tous les maxima sont égaux au rayon incident, et les minima au rayon diminué de quatre fois la lumière réfléchie à la première surface. La différence de phase entre le rayon simple et le rayon émergent composé, ou la valeur de B dans la formule précitée, résulte de l'équation

$$\sin B = \frac{a}{A} \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right) = a \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda}\right),$$

en négligeant A^2 : ainsi, dans les milieux d'un pouvoir réfringent médiocre, cette différence est toujours petite; cependant elle est périodique et varie avec l'épaisseur.

663. — Supposons maintenant que ce soit de la lumière blanche, au lieu d'une lumière homogène, qui tombe sur la lame, et désignons un rayon de cette espèce par $C + C' + C'' +$ etc., comme à l'art. 488, ou par $S(C)$, C', C'', etc., étant l'intensité de chaque rayon élémentaire. Le faisceau composé aura pour teinte et pour intensité

$$C\left(1 - 4a\sin^2 . \frac{2\pi t}{\lambda}\right) + C'\left(1 - 4a\sin^2 . \frac{2\pi t}{\lambda'}\right) + \text{etc.},$$

ou, par abréviation,

$$S . C\left(1 - 4a\sin^2 . \frac{2\pi t}{\lambda}\right).$$

Or cette expression est la même chose que

$$S\left[C(1-4a) + C\left(4a - 4a\sin^2 . 2\pi . \frac{2t}{\lambda}\right)\right]$$
$$= (1-4a) . S(C) + 4a . S\left(C . \cos^2 2\pi . \frac{2t}{\lambda}\right).$$

Le premier terme de cette équation représente un rayon de lumière blanche d'une intensité $= 1 - 4a$; le second représente une teinte d'une intensité $= 4a$, affaiblie par la lumière blanche précédente et formant les teintes pâles dans la série des anneaux transmis. Si nous n'avons pas égard à ce mélange de blanc, et que nous prenions la teinte dans sa pureté absolue, elle aura pour expression

$$4a \,.\, S\left(C\cos^2 . 2\pi . \frac{2t}{\lambda}\right)$$
$$= 4a \,.\, \left[S(C) - S\left(C\sin^2 . 2\pi . \frac{2t}{\lambda}\right)\right];$$

ce qui indique qu'elle est *complémentaire* de la teinte représentée par

$$S . C . \sin^2 . 2\pi . \frac{2t}{\lambda}.$$

Mais si l'on imagine une courbe dont les abscisses soient t et les ordonnées $C \sin^2 2\pi \frac{2t}{\lambda}$, il est évident qu'elle sera précisément la même que la courbe onduleuse (fig. 134) qui caractérise chaque rayon prismatique. En faisant la somme des ordonnées pour chaque couleur du spectre, on retrouvera la construction qui nous a déjà donné les couleurs des anneaux réfléchis (art. 645).

Si l'on prend donc la série de ces derniers, et qu'on mêle de blanc leurs teintes complémentaires dans la proportion de $1 - 4a$ rayons blancs sur $4a$ rayons de la couleur complémentaire, on obtiendra la série des anneaux transmis que suppose la théorie des interférences, et qu'on observe effectivement.

664. — Passons au cas de transmission oblique.

Soient A C, BD (fig. 135), les surfaces de la lame, et A a son épaisseur. Soit A E la surface d'une onde dont le point A vient d'atteindre la première surface de la lame.

Représentons par S A, S C, perpendiculaires à A E, des rayons émanant d'une origine commune S : ceux-ci se réfléchiront en partie, et l'intensité de la lumière sera diminuée dans un certain rapport (de 1 à $1 - a$) qui dépendra de l'angle d'incidence.

L'onde transmise sera déviée, et prendra la position Ab, en suivant la route A B du rayon transmis, qui sera en B F lorsque l'onde sera en F G hors de la lame. Il se fera ici une

autre réflexion partielle dépendante de l'incidence à l'intérieur : nous dénoterons par $(1-a)(1-\alpha)$ la partie transmise, et par $(1-a)\alpha$ la partie réfléchie. Ces deux parties s'éloignent ensemble de B.

La première, animée d'une vitesse V due au milieu extérieur, suit la ligne B H parallèle à S A, et forme une onde que l'on peut regarder comme un plan d'une étendue indéfinie, qui se meut uniformément le long de BH avec une vitesse V, pourvu que le point S soit à une distance suffisante.

La seconde se dirige suivant B C, en vertu de la loi de réflexion, avec une vitesse V′ due au milieu dont la lame est faite, jusqu'à ce qu'elle arrive en C, où elle subit une autre réflexion partielle, et retourne en arrière, suivant C D, avec une intensité moindre $=(1-a)\alpha^2$, mais avec la même vitesse V′, jusqu'à ce qu'elle parvienne en D, après avoir décrit la route

$$BC+CD=2AB.$$

En D elle subit encore une réflexion partielle, et la partie transmise,

$$=(1-a)(1-\alpha)\alpha^2;$$

quitte le point D pour suivre D I, parallèle à B H, avec la vitesse V, c'est-à-dire avec la même vitesse que l'onde qui suit B H. Cette onde peut aussi être considérée comme un plan d'une étendue indéfinie, perpendiculaire à D I, et, conséquemment, parallèle à la première. Mais ces deux ondes ne coïncident pas, car la première, ayant l'avance sur la seconde, prendra la position I H K quand l'autre ne sera qu'en D L M, et toutes deux se mouvant alors avec la même vitesse V, elles conserveront toujours la même distance entre elles. L'intervalle L H peut être appelé l'*intervalle de retard*. Pour le déterminer, nous observerons que la première onde décrit l'espace B H avec une vitesse V, tandis que l'autre décrit B C + C D avec une vitesse V′ : par conséquent

$$BH=(BC+CD)\frac{V}{V'}=2AB\frac{V}{V'}=2t\,.\,\text{séc}\,\rho\,.\,\mu\,,$$

en nommant μ l'indice de réfraction relatif de la lame, ρ l'angle de réfraction a AB, t l'épaisseur A a, et en se rappelant que

$$V : V' :: \mu : 1.$$

Or, φ étant l'angle d'incidence correspondant à l'angle ρ de réfraction,

$$BL = BD . \cos DBL = DB . \sin \varphi$$
$$= 2\, aB . \sin \varphi = 2\, t . \tang \rho . \sin \varphi,$$

et l'intervalle de retard aura pour expression

$$2\, t\, (\mu . \text{séc}\, \rho - \tang \rho . \sin \varphi)$$
$$= \frac{2\, t . \mu}{\cos \rho}\, (1 - \sin^2 \rho) = 2\, \mu\, t . \cos \rho,$$

parce que

$$\sin \varphi = \mu \sin \rho.$$

665. — Ainsi, en vertu des deux réflexions à l'intérieur, chaque onde deviendra double en quittant le milieu, étant suivie d'une autre onde plus faible, qui en est séparée par un intervalle constant représenté par $2\, \mu\, t \cos \rho$, et qui a pour intensité la valeur donnée plus haut. Comme on peut dire la même chose de toutes les ondes qui composent le rayon, ces deux systèmes, auxquels on peut supposer une durée indéfinie, se superposeront et interféreront ensemble.

666. — Soit λ la longueur d'une ondulation dans la lame; $\mu\, \lambda$ représentera celle d'une ondulation dans le milieu ambiant : cette proposition est évidente, car la vitesse dans le milieu sera à la vitesse dans la lame $:: \mu : 1$; et, puisque le nombre d'ondulations est le même dans les deux cas et a lieu dans le même temps, il faut qu'elles se resserrent dans la lame, et qu'elles y occupent un espace proportionnel à leur vi-

tesse; d'où il suit que les différences de phase entre les systèmes interférents sera, pour un point quelconque,

$$2\pi \cdot \frac{\text{l'intervalle de retard}}{\mu\lambda} = 2\pi \cdot \frac{2t\cos\rho}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda},$$

en posant

$$t' = t\cos\rho.$$

667. — L'onde résultante sera exprimée par l'équation

$$X = \sqrt{(1-a)(1-\alpha)}\left[\cos\theta + \alpha\cos\left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda}\right)\right],$$

qui donne, lorsqu'on la réduit à la forme

$$A \cdot \cos(\theta + B),$$

$$A^2 = (1-a)(1-\alpha)\left[1 + 2\alpha \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda}\right) + \alpha^2\right]$$

et

$$\sin B = \frac{\alpha \sin\left(2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 + 2\alpha \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda}\right) + \alpha^2}}.$$

668. — Telles sont les formules générales relatives à l'intensité et au changement d'origine du rayon transmis. Cependant, lorsque a et α sont des quantités très petites, ce qui arrive nécessairement dans certains cas, la valeur de A^2 se simplifie en négligeant les carrés et le produit de a et de α, et devient égale à

$$(1 - a + \alpha) - 4\alpha \cdot \sin^2\left(2\pi \cdot \frac{t'}{\lambda}\right);$$

expression analogue à celle de l'art. 662, dans le cas de l'incidence perpendiculaire.



On voit par là qu'à une très légère différence près dans le degré de coloration, l'éclat pour la lumière homogène, ou la teinte pour la lumière blanche, varie suivant les mêmes lois dans les deux cas.

669. — Il y a pourtant une différence essentielle : c'est que les teintes correspondantes à l'épaisseur t, dans le cas d'incidence oblique, auraient été produites par l'épaisseur $t \cos \rho$ dans celui de l'incidence perpendiculaire; ce qui provient de ce que

$$t' = t \cos \rho.$$

Comme cette dernière valeur est toujours moindre que t, la teinte qui répond à une épaisseur donnée, quand l'incidence est oblique, est toujours d'un ordre plus élevé (c'est-à-dire qu'elle correspond à une épaisseur moindre) que si l'incidence était perpendiculaire. Ainsi les anneaux ou franges que l'on voit par transmission s'élargissent quand on incline la lame par rapport à l'œil. Tant que l'obliquité de l'incidence n'est pas trop considérable, la loi de cette dilatation revient, à très peu près, à la règle de Newton : car celle-ci donne, en négligeant $\sin^4 \rho$,

$$\text{séc } u = \text{séc } \rho \left[1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{106}{107} (\mu - 1) \text{ tang}^2 \rho \right];$$

valeur qui s'écarte peu de séc. ρ quand l'incidence n'est pas trop oblique.

670. — Il n'en est pas de même quand l'obliquité est très grande. Les résultats de l'expérience s'écartent tellement de ceux que donne la théorie des ondulations, qu'on pourrait en tirer un argument solide contre cette doctrine, si l'on était sûr que le sinus d'incidence conserve un rapport invariable avec le sinus de réfraction dans le cas d'une lame mince et d'une extrême obliquité; ce qui est néanmoins très probable, comme l'a remarqué Fresnel (*Mém. sur la diffraction*, etc.), et comme nous avons déjà eu occasion de le faire observer.

Nous nous contenterons de proposer ici une *explication vraisemblable* de cette difficulté, que le système ondulatoire n'a pas encore su lever entièrement, sans discuter à fond ce point délicat.

671. — On peut attribuer les anneaux réfléchis à la transmission partielle des ondes qui, étant renvoyées en arrière par la seconde surface, interfèrent avec celles que réfléchit immédiatement la première. Les intensités de ces ondes sont, en général, dans le rapport de a à $(1-a)(1-\alpha)\alpha$; ou, lorsque a et α sont assez petits, dans celui de a à α. Dans le cas d'incidence perpendiculaire, ce rapport approche beaucoup de l'égalité : ainsi la destruction des ondes, dans le cas d'opposition complète, sera beaucoup plus exacte pour les anneaux réfléchis que pour les autres; les couleurs seront plus vives aussi, étant moins affaiblies par le mélange du blanc.

672. — On a fait encore contre la doctrine ondulatoire une objection trop importante pour être passée sous silence. Si l'on appliquait aux anneaux réfléchis le raisonnement dont nous avons fait usage pour les anneaux transmis, on arriverait à la conclusion que leurs teintes seraient *précisément les mêmes* et dans le même ordre, à partir d'une tache d'un blanc brillant qui occuperait le centre. En effet, la route du rayon dans l'intérieur de la lame devenant nulle en ce point, les ondes réfléchies par les deux surfaces devraient s'accorder parfaitement, tandis qu'au contraire l'expérience nous apprend que la tache au centre est noire. Il faut nécessairement supposer, dans ce cas, qu'il y a une demi-ondulation gagnée ou perdue par l'une des ondes que réfléchissent les deux surfaces. Cette hypothèse admise, les phénomènes que présentent les anneaux réfléchis sont exactement représentés dans le système des ondulations. L'onde réfléchie par l'action combinée des deux surfaces est exprimée par l'équation

$$X = \sqrt{a} \cos \theta + \sqrt{a(1-a)(1-\alpha)} \cdot \cos \left(\theta + 2\pi \cdot \frac{2t' - \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right);$$

et, si l'on pose

$$X = A \cos (\theta + B),$$

il vient

$$A^2 = a + \alpha(1-\alpha)(1-a) - 2\sqrt{a\alpha(1-\alpha)(1-a)} \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{2t'}{\lambda} \right).$$

Si a et α sont des fractions très petites,

$$A^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{\alpha})^2 + 4\sqrt{a\alpha} \sin^2 \left(2\pi \frac{t'}{\lambda} \right).$$

Si en même temps l'incidence est perpendiculaire, auquel cas $t' = t$ et $\alpha = a$ à très peu près,

$$A^2 = 4a \cdot \sin^2 \left(2\pi \frac{t}{\lambda} \right).$$

673. — Nous voyons ainsi que, dans ce dernier cas, l'intensité totale de l'onde réfléchie, plus celle de l'onde transmise (art. 662), vaut l'unité, qui représente l'intensité de l'onde incidente. L'hypothèse de la perte ou du gain d'une demi-ondulation n'implique donc aucune contradiction avec le principe des forces vives.

674. — D'ailleurs, si l'on ne considère que la manière dont se propagent les ondulations à la limite entre deux milieux, on ne trouvera rien de contraire aux lois de la dynamique dans l'hypothèse précédente. En effet, on ne peut supposer que l'éther change brusquement de densité ou d'élasticité à la surface d'un milieu; il paraît plus probable qu'il y a là une légère couche, où cette densité varie continuellement, et où la longueur d'une ondulation ne répond exactement ni au milieu le plus dense ni au plus rare. C'est pour-

quoi le nombre des ondulations qui doit déterminer la phase du rayon, lorsqu'il aura traversé cette couche, ne sera pas le même que si les milieux se succédaient immédiatement. Sans connaître ni la loi de la densité, ni les limites entre lesquelles s'opère ce changement, ni la manière dont les ondes se réfléchissent partiellement dans cette couche, il est impossible de soumettre cette question à l'analyse. Nous sommes donc obligés de recourir à l'expérience, et de nous contenter de ce qu'elle nous apprend.

Dans le cas précédent, on observe qu'il y a une demi-ondulation de plus entre les phases de deux rayons réfléchis qu'entre celles de deux rayons transmis. On peut inférer de quelques expériences du docteur Young que cette différence n'est pas toujours exactement d'une demi-ondulation, mais plutôt d'une fraction dépendante de la nature des milieux contigus.

675. — Les formules de l'art. 672 prouvent que les teintes ne sont pures que dans le cas de l'incidence perpendiculaire; dans tous les autres, surtout pour de grandes obliquités, quand a et α diffèrent considérablement, les couleurs sont mêlées de blanc. Sous l'incidence perpendiculaire, les anneaux minima doivent disparaître entièrement quand la lumière est homogène; de manière que, si l'on posait un objectif sur un plateau de verre, en empêchant les rayons réfléchis par la surface supérieure d'arriver jusqu'à l'œil (à l'aide d'un prisme, par exemple), les intervalles entre les anneaux produits par la lumière homogène paraîtraient absolument noirs. Ce fait semble contraire à la doctrine de Newton, car, d'après celle-ci, la lumière réfléchie par la surface supérieure de la couche d'air éclairerait toujours les anneaux minima : cette remarque permet donc de décider entre les deux théories. Fresnel décrit une expérience qu'il a faite à ce sujet, et il affirme qu'elle est péremptoire en faveur du système des ondulations. (*Diffraction de la lumière*, page 11.)

§ V. — *Des couleurs produites par des lames épaisses.*

Expérience de Newton avec un miroir de verre. — Explication des anneaux colorés, suivant la doctrine ondulatoire. — Loi des diamètres des anneaux. — Loi des couleurs. — Concentration de la lumière de tous les points de la surface. — Discussion de l'expérience de Newton. — Cas d'incidence oblique. — Phénomènes observés par le duc de Chaulnes et par sir W. Herschel. — Franges vues par le docteur Brewster dans des lames épaisses : leur description, leur explication. — Définition des lignes isochromatiques. — Franges entre des lames très minces de verre soufflé.

676. — Dans certaines circonstances, des lames épaisses de diverses matières transparentes produisent des anneaux colorés. Un des cas principaux a été observé par Newton, qui l'a expliqué d'après sa doctrine des accès. Voici comment il décrit ce phénomène :

« Ayant fait passer un rayon solaire dans une chambre obscure, par un trou d'un tiers de pouce de diamètre, je le reçus perpendiculairement sur un miroir de verre étamé concavo-convexe, d'un quart de pouce d'épaisseur, et dont chaque surface appartenait à une sphère de six pieds de rayon. En tenant alors, au centre de courbure, un morceau de papier percé d'un petit trou, de manière à laisser passer la lumière incidente et la lumière réfléchie par le miroir, ce trou me parut entouré de quatre ou cinq anneaux colorés concentriques, exactement semblables aux anneaux qui entourent la tache au centre dans l'expérience avec les lentilles ; seulement les couleurs étaient lavées et les anneaux plus larges.

. . . .

« Quand le papier était à plus ou moins de six pieds du miroir, les couleurs devenaient plus pâles et finissaient par s'effacer.

. . . .

« Les couleurs se succédaient dans le même ordre que

celles que l'on voit par transmission dans les lames minces ; c'est-à-dire le blanc d'abord, puis le blanc grisâtre, le noir, le violet, le bleu, le jaune verdâtre, le jaune, le rouge, le pourpre, etc.

. . . .

« Les diamètres de ces anneaux étaient entre eux dans les mêmes proportions que ceux des lames minces, leurs carrés formant une progression arithmétique qui commençait par o, diamètre de la tache blanche au centre. Les diamètres des anneaux lucides avaient pour mesure o, $1\frac{11}{16}$, $2\frac{3}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{3}{8}$.

. . . .

« Enfin, quand j'employais des miroirs de diverses épaisseurs, les diamètres des anneaux homologues étaient réciproques aux racines carrées des épaisseurs. Quand la surface convexe du miroir était étamée, les couleurs des anneaux n'en étaient que plus vives. »

677. — Ces phénomènes et d'autres semblables, d'une plus ou moins grande complication suivant la distance et l'obliquité du miroir et la courbure des surfaces, ont été expliqués d'une manière fort heureuse par Newton (*Optique*), en considérant les accès de facile réflexion et de facile transmission de cette faible portion de lumière qui se dissémine en tous sens à la première surface du verre, et qui sert à la rendre visible. Pour nous, nous allons essayer de rendre compte de ce phénomène d'après la théorie des ondulations ; ce que l'on n'a fait jusqu'à présent que d'une manière incomplète et assez obscure.

678. — Aucune surface, quelque polie qu'on la suppose, n'est exempte de petites aspérités dont l'effet est de réfléchir et de transmettre, outre les rayons principaux qui obéissent aux lois de la réflexion et de la réfraction, d'autres plus faibles qui se répandent dans toutes les directions, et qui rendent la surface visible pour un œil placé en un point quel-

conque de l'espace : ceux-ci se trouvent surtout en grande quantité dans le voisinage des rayons régulièrement réfléchis ou transmis. Ces derniers, se disséminant en partie dans leur propre direction en traversant la première surface, produisent, par leur interférence, les anneaux qui nous occupent maintenant.

679. — Soient FAD, EBG (fig. 136), les surfaces parallèles d'un milieu qui reçoit perpendiculairement en A un rayon homogène émané de C. La plus grande partie de ce rayon passera par A, et sera réfléchie vers ce même point par B; mais, en A, il y a dissémination, et le rayon transmis AB est entouré d'un cône de rayons très faibles A*a*, A*b*, A*c*, etc., qui divergent tous du point A, dans la même phase d'ondulation que le rayon incident; de sorte que A peut être regardé comme une origine commune.

Soit Q le foyer conjugué des rayons réfléchis par la seconde surface, A sera l'autre foyer; et, si les surfaces sont planes, Q et A seront équidistants du point B. Les rayons disséminés formeront un cône qui aura pour axe le rayon réfléchi régulièrement, et qui divergera par rapport à Q. Or, quand ils repasseront dans l'air, ils iront en divergeant à partir de *q*, foyer conjugué, par rapport à Q, des rayons réfractés par la surface FD; et, par la nature même des foyers, les ondulations se propageront comme si elles avaient pour origine commune le point *q qui se trouve dans l'air,* puisque les ondes ont, après la réfraction, la forme de sphères concentriques autonr de *q* : par conséquent, si elles émanaient réellement de ce point en rayons isolés, ceux-ci seraient tous dans la même phase. Quand le rayon réfléchi est revenu en A, il s'en dissémine encore une partie en forme d'un cône dont l'axe est le rayon régulièrement transmis AC. Les rayons AO, AN, AM, etc., ont tous A pour origine, et sont, en quittant ce point, dans la même phase que le rayon AC, qui se trouve dans la même phase que s'il émanait de *q*. Conséquemment, si l'on considère un point M hors de la direction du rayon

directement transmis, ce point sera touché par deux ondes à la fois, l'une appartenante au cône autour de q M, et l'autre au cône autour de A M : la différence des routes est égale à

$$q\,A + A\,M - q\,N.$$

Lorsque M est très près de C, cette différence est très petite. En C elle s'évanouit, et les ondes s'accordent parfaitement; elle augmente quand M s'éloigne de C; et, lorsqu'elle devient égale à une demi-ondulation, les ondes sont en opposition complète et se détruisent mutuellement. Comme on peut dire la même chose de tous les rayons qui forment des cônes autour de A C, pourvu qu'ils aient les mêmes inclinaisons par rapport à A M et à qN, si l'on place un écran en C, il paraîtra couvert d'anneaux alternativement obscurs et lucides, dont le centre commun sera lumineux. Pour déterminer leurs diamètres, nous poserons

$$q\,A + A\,M - q\,N = n \cdot \frac{\lambda}{2},$$

ou, en prenant

$$q\,A = a, \quad A\,C = r, \quad C\,M = y,$$

$$a + \sqrt{r^2 + y^2} - \sqrt{(a + r)^2 + y^2} = n \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

Résolvant cette équation, en négligeant y^2, il vient

$$y = \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{a} \cdot r\,(a + r)};$$

par où l'on voit, en écrivant successivement, 0, 1, 2, 3, etc., au lieu de n, que les diamètres des anneaux sont entre eux comme les racines carrées de ces nombres.

680. — Si l'épaisseur de la lame est peu considérable par

rapport à la distance de l'écran, a sera tres petit et y deviendra simplement

$$y = r\sqrt{n}\sqrt{\frac{\lambda}{a}};$$

ce qui fait voir que, pour des rayons d'une réfrangibilité donnée, les diamètres des anneaux sont directement proportionnels à leur distance de l'écran et en raison inverse de la racine carrée de l'épaisseur.

681. — Enfin les diamètres de deux anneaux de même ordre, dus à des lumières homogènes différentes, sont comme les racines carrées des longueurs d'ondulation de ces anneaux. Cette loi étant la même que celle qui donne les diamètres des anneaux formés entre des objectifs, en remplaçant la lumière homogène par la lumière blanche, nous aurons une suite d'anneaux colorés dont les teintes seront les mêmes que celles des anneaux transmis dont il a été question au paragraphe précédent.

682. — Quoique les rayons produits par la lumière disséminée autour d'un seul point A soient trop faibles pour affecter la vue, si l'on suppose que les surfaces soient des sphères concentriques (fig. 137) ayant G pour centre commun, des rayons quelconques, tels que G A, G A', tombant sur ces surfaces, et respectivement perpendiculaires aux écrans G M, G M', peindront sur ceux-ci des systèmes d'anneaux dont G sera le centre. Si l'arc A A' est assez petit, on peut regarder les deux écrans comme n'en formant qu'un (puisque, dans cette hypothèse, B M — M A = B M' — M A'), et les anneaux de chaque point de la surface comme exactement superposés. Augmentant par là d'intensité à mesure que l'aire de la surface exposée est plus grande, les couleurs deviennent nécessairement visibles.

683. — Tel est précisément le cas observé par Newton. Le soleil étant un luminaire d'un diamètre considérable, le trou au centre des sphères peut être regardé comme une portion du disque solaire, de la même grandeur, placée au même endroit. Chaque point indivisible de cette portion sera l'origine d'un système d'ondes qui peindront sur l'écran une suite d'anneaux. Ceux-ci auraient des teintes infiniment plus pures et plus distinctes que les anneaux transmis, si le trou était infiniment petit, puisqu'ils ne seraient pas affaiblis par le mélange de la lumière blanche qui domine dans les autres et échappe à l'interférence; mais comme le trou a toujours un diamètre sensible, leurs teintes se mêlent et s'affaiblissent, et cela d'autant plus que l'ouverture est plus grande.

684. — Soit c l'épaisseur du verre et $r+c$ le rayon de la surface B: puisque Q est le foyer conjugué de A, nous aurons (art. 249)

$$BQ = \frac{r+c}{r-c} \cdot c, \quad AQ = \frac{2rc}{r-c};$$

et, en vertu de l'art. 248,

$$Aq = a = \frac{2cr}{2c - \mu(r+c)},$$

en nommant μ l'indice de réfraction. Si c est petit en comparaison de r, on a

$$a = \frac{2c}{\mu}, \quad y = r\sqrt{n}\sqrt{\frac{\mu}{2} \cdot \frac{\lambda}{c}};$$

ce qui montre que les diamètres des anneaux sont, dans ce cas, en raison sous-doublée directe de l'indice de réfraction et inverse de l'épaisseur.

685. — En réduisant ces formules en nombres, prenant, par exemple, $\mu = \frac{3}{2}$, $n = 4$, $r = 6$ pieds $= 72$ pouces, et $\lambda = \frac{2}{89000} =$ la longueur d'une ondulation pour le jaune

ou environ $\frac{2}{90000}$, on trouve pour diamètre du second anneau lucide produit par la lumière jaune (ce qui correspond à la partie la plus éclatante du même anneau quand on emploie de la lumière blanche),

$$2y = 72 \times \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{90000} \cdot 4} = 2.35,$$

valeur qui s'accorde bien avec celle de Newton, $2\frac{3}{8}$ ou 2.375.

686. — Lorsque le miroir reçoit obliquement la lumière incidente, le phénomène devient plus compliqué. Newton l'a décrit avec beaucoup d'élégance (*Optique*, liv. 2, 4[e] partie, observ. 10). Dans ce cas, les axes des deux cônes interférents de rayons disséminés, qui sont toujours les rayons incident et réfléchi, ne coïncident point; mais ce problème peut être résolu comme le précédent, en faisant l'application des mêmes principes.

687. — Le duc de Chaulnes observa de semblables anneaux à la surface d'un miroir couvert d'une légère pellicule de lait desséché, de manière à former une couche semi-transparente, ou d'une mousseline ou gaze très fine. (Voy. la description de ses expériences dans les *Mém. de l'Acad. des sciences*, Paris, 1705.)

Sir W. Herschel (*Trans. phil.*, 1807) cite une expérience assez curieuse, qui se fait en répandant de la poudre (d'amidon) dans l'air, devant un miroir métallique qui reçoit un rayon de lumière, et en interceptant le rayon réfléchi au moyen d'un écran.

L'explication de ces phénomènes paraît dépendre cependant d'autres applications des principes généraux : on l'entendra plus facilement quand nous aurons parlé des couleurs dues à la diffraction.

688. — Le docteur Brewster décrit, dans les *Transactions*

de la société royale d'Edimbourg, une série de franges colorées produites par des lames de verre épaisses, qui offrent un exemple frappant des lois de périodicité que les rayons suivent en se propageant, soit que nous les regardions, avec Newton, comme soumis à des accès alternatifs, soit que, d'après le système ondulatoire, nous supposions qu'ils passent par une suite de phases alternativement progressives et rétrogrades, puisqu'ils ne se composent que des vibrations des molécules éthérées. Nous remarquerons ici, une fois pour toutes, que la plupart des explications selon la doctrine ondulatoire peuvent se traduire dans le langage du système corpusculaire, de manière à offrir des résultats qui s'accordent plus ou moins avec les observations. Ce n'est donc pas parmi des phénomènes de cette espèce qu'il faut chercher des preuves décisives en faveur de l'un ou de l'autre système. Dans la suite de cet ouvrage, nous adopterons la doctrine des ondulations, sans la regarder cependant comme une *vérité physique*, mais comme le moyen le plus simple de grouper ensemble et de représenter non seulement les phénomènes explicables dans l'hypothèse de Newton, mais une foule d'autres faits auxquels celle-ci ne se plie qu'avec beaucoup de difficulté, et à l'aide de plusieurs suppositions tout-à-fait gratuites.

689. — Les franges dont il s'agit s'observent lorsqu'on regarde au travers de deux lames de verre parallèles, d'épaisseur exactement égale, et légèrement inclinées l'une sur l'autre, un luminaire rond, d'un ou deux degrés de diamètre (une partie du ciel, par exemple), sous une incidence à peu près perpendiculaire. On voit alors, outre l'image directe, une série d'images latérales réfléchies entre les verres, qui deviennent successivement de plus en plus pâles, suivant qu'elles sont dues à 2, 4, 6, etc., réflexions à l'intérieur. Excepté quand la lumière est très vive, on ne distingue guère que la première image réfléchie : celle-ci paraît entrecoupée de quinze ou seize bandes colorées parallèles à l'intersection

des surfaces; mais l'image directe est incolore. La largeur de ces franges diminue rapidement lorsque l'inclinaison des lames vient à augmenter. Quand les lames ont 0.121 de pouce d'épaisseur, et qu'elles forment entre elles un angle de 1° 11', la largeur de chaque frange est de 26' 50". Pour tous les autres angles, cette largeur est réciproque à l'inclinaison. Quand l'incidence est oblique, les franges commencent à être visibles lorsque le plan d'incidence est perpendiculaire à la section principale des lames; mais elles sont aussi distinctes qu'elles peuvent l'être quand ce plan est parallèle.

690. — Pour concevoir la formation de ces franges, désignons par A, *a*, B, *b*, les surfaces des lames, en commençant par celle qui reçoit la lumière incidente, et considérons un système d'ondes émanant d'une origine commune à une distance infinie. Quand un rayon tombera sur les lames, il subira à chaque surface une réflexion partielle; de manière que chaque image sera produite par des rayons émergents dont les directions sont parallèles à la fin de leur course, mais qui traversent les verres suivant des routes différentes. Ainsi l'image directe ou principale se composera :

1° De la plus grande partie de la lumière incidente réfractée en A, en *a*, en B et en *b*, qui émerge parallèlement au rayon incident. Nous la représenterons par A*a*B*b*.

2° D'une partie réfractée en A, réfléchie en *a*, réfléchie de nouveau en A, réfractée de nouveau en *a*, en B, en *b*, et qui émerge comme la précédente. Nous la dénoterons par A *a'* A' *a* B *b*, les lettres désignant les surfaces et les accents les réflexions.

3° D'une partie qui a subi deux semblables réflexions dans la seconde lame, et que nous désignerons conséquemment par A *a* B *b'* B' *b*.

4° D'autres parties qui ont subi 4, 6, etc., réflexions, jusqu'à l'infini, dans l'intérieur des lames. Nous les représenterons par des combinaisons telles que A *a'* A' *a'* A' *a* B *b*, A *a* B *b'* B' *b'* B' *b*, ou, pour abréger, par $A\,(a'A')^2\,a\,B\,b$,

A a B (b' B$'$)^2 b, etc.; mais ces dernières parties sont trop faibles pour avoir quelque influence sur la lumière de l'image directe, avec laquelle elles se confondent.

691. — La première image latérale se composera de quatre parties principales, qui auront subi chacune quatre réflexions, savoir :

A a B$'$ a' B b, A a B$'$ a A$'$ a B b,

A a B b' B a' B b, A a B b' a A$'$ a B b,

qui émergeront toutes parallèlement. Il y en a encore une foule d'autres, dues à des réflexions plus multipliées et à la partie A a' A$'$ a du rayon incident réfléchie à l'intérieur du premier verre; mais elles sont trop faibles pour en tenir compte. Nous pouvons donc regarder l'image en question comme formée uniquement par les quatre rayons que nous venons de considérer. Il suffit de jeter un coup-d'œil sur la fig. 138 pour reconnaître la route que suit chacune des parties 1, 2, 3, 4 : il est évident que la première traverse l'épaisseur t deux fois et environ trois fois l'intervalle i entre les verres, c'est-à-dire, en n'ayant pas égard pour le moment à l'inclinaison des lames . . . . $2t + 3i$.

Pareillement :

La partie 2 a pour longueur de route . . $4t + 3i$.
La partie 3 . . . . $4i + 3t$.
La partie 4 . . . . $6t + 3i$.

D'où il suit que les parties 1 et 4 ont une différence de route égale à près de quatre fois l'épaisseur du verre, et ne peuvent produire des couleurs; mais les autres parties ne différeront aucunement sous l'incidence perpendiculaire. Quand les lames n'auront qu'une légère inclinaison, et que le rayon incident sera très peu oblique, ces parties ne différeront qu'en raison des petites différences d'inclinaison que l'on remarque entre elles lorsqu'elles traversent les épaisseurs et les intervalles : elles produiront donc des iris par

leur interférence, qui dépendra de l'intervalle de retard des rayons en se succédant, et de l'obliquité variable des rayons visuels.

692. — Quand on observe une image lumineuse d'une grandeur sensible, les rayons qui nous la rendent visible dans toutes ses parties tombent dans des plans différents et sous des inclinaisons de toute grandeur. Ainsi l'image doit paraître, en chaque point, d'une couleur différente. Quelle que soit la loi qui règle la disposition de ces couleurs, elle doit dépendre de l'intervalle de retard.

Les couleurs seront donc disposées en bandes, cercles, etc., selon la forme des courbes qui résultent de la considération géométrique des intervalles de retard de même grandeur : nous les nommerons lignes *isochromatiques* ou courbes d'égale teinte, en prenant pour mesure de la *teinte* le nombre des ondulations, ou parties d'ondulation, de la lumière jaune moyenne que contient l'intervalle de retard.

693. — Considérons d'abord un rayon incident contenu dans un plan perpendiculaire à l'intersection.

Dans ce cas (fig. 159), soit K L M N un rayon formé par la réunion de deux autres, S A *a* B *b* I K L et S C E F G H K L, dont les routes à travers le système sont représentées par le chiffres 2 et 3 (fig. 158).

Menons A D perpendiculaire à SC, et l'intervalle de retard sera égal à

$$(DC + CE + EF + FG + GH + HK)$$
$$- (Aa + aB + Bb + bI + IK)$$
$$= DC + (EF - aB) + (FG - IK) + 2\,(KH - Bb).$$

Les trois premiers termes sont la partie de la route parcourue dans l'air, et les autres, dans le verre. Sans avoir

recours à la trigonométrie, on voit aisément que le polynome précédent n'a qu'une valeur très petite quand l'incidence est perpendiculaire, mais qu'il croît rapidement lorsque l'angle d'incidence vient à augmenter; qu'en outre, l'inclinaison des lames restant la même, il croît par degrés à peu près égaux, lorsque l'incidence varie de la même manière des deux côtés de la perpendiculaire, à compter de zéro : par conséquent, dans la direction perpendiculaire à l'intersection, les teintes varieront avec rapidité; et, sous des incidences, même assez peu obliques, des deux côtés de la perpendiculaire, l'intervalle de retard deviendra trop grand pour produire des couleurs.

D'un autre côté, si nous concevons que les rayons S A, S C, se trouvent dans un plan d'incidence presque parallèle à la section principale, les points K et G seront situés, non à des distances différentes de P, comme on le voit dans la figure, mais à des distances à très peu près égales. Quelle que soit l'incidence, K I sera donc peu différent de G F, et, pour la même raison, F E sera très près d'égaler aB. D'ailleurs, dans ce cas, G K = F I à peu près, et les angles d'incidence à l'intérieur sont presque égaux; de manière que H G + G K diffère peu de B b + b I, ainsi que I B de G K, et conséquemment de I F : ainsi le point F coïncidera presque exactement avec B, et S A a B avec S C E F, si l'on pose D C = o.

Ces égalités et ces coïncidences approchées auront lieu pour de grandes variations de l'angle d'incidence, pourvu que le plan d'incidence demeure invariable : cet angle n'aura donc que très peu d'influence sur la grandeur de l'intervalle de retard, et la teinte sera à peu près uniforme dans toutes les lignes parallèles à l'intersection des surfaces. Ainsi les couleurs seront disposées en franges parallèles à cette ligne, conformément à la description donnée par le docteur Brewster. Quoique, d'après ce qui vient d'être dit, on puisse trouver assez facilement leur expression analytique; elle est trop compliquée pour que nous la rapportions ici.

694. — En interceptant le rayon principal qui produit l'image directe, et en ne laissant arriver à l'œil que les parties du rayon telles que A a' A' a B b et A a B b' B' b, le docteur Brewster est parvenu à rendre visible une série de franges colorées qui sont ordinairement effacées par l'éclat de l'image directe. Elles sont dues à l'interférence de ces parties, dont les routes sont représentées toutes deux par $4t+i$, et qui seraient rigoureusement égales si les lames étaient parallèles. La seule inspection de la figure suffira pour s'en rendre compte, ainsi que de tous les autres systèmes de franges décrits dans le mémoire précité.

695. — M. Talbot a observé qu'en exposant des fragments de bouteille excessivement minces à la lumière jaune homogène, et même à celle des nuées, il se formait, entre deux lames superposées, des stries alternativement lucides et obscures, ou des bandes colorées et des franges irrégulières, quoique chaque lame séparée n'offrît aucune de ces apparences : il est évident qu'on doit les rapporter aux mêmes principes que les phénomènes qui précèdent. Il se fait une interférence entre les rayons réfléchis deux fois à l'intérieur par la lame de dessus et une fois par la première surface de la lame inférieure, ou bien entre des rayons dont l'un est réfléchi trois fois, comme A a B' a' B' a A, et dont l'autre est tel que A a B' a A' a' A. On suppose d'ailleurs que l'intervalle entre les verres est exactement égal à l'épaisseur de la lame supérieure dans les deux hypothèses ; condition qu'on est toujours sûr de remplir lorsque les lames sont courbes.

On peut expliquer de la même manière les couleurs observées par M. Nicholson en combinant des verres parallèles d'inégale épaisseur. Supposons que ces épaisseurs t, t', diffèrent d'une petite quantité : la route des rayons A a' A' a B b et A a B b' B' b, sous l'incidence perpendiculaire, sera respectivement $3t+i+t'$ et $t+i+3t'$, ce qui suppose des lames rigoureusement parallèles, et la différence des routes

sera $2t - 2t'$. Si cette quantité est extrêmement petite, il se formera des couleurs, ou il suffira d'incliner un peu les lames pour en obtenir.

---

§ VI. — *Des couleurs produites par la combinaison de lames de différente épaisseur.*

Interférence de rayons qui ne coïncident point rigoureusement. — Irradiation. — Phénomènes produits par la combinaison de différentes lames.

696. — Les couleurs dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent étaient dues à l'interférence de rayons qui coïncidaient rigoureusement pendant toute leur route, à partir du point où ils commençaient à se couvrir. De tels rayons ou systèmes d'ondes venant se réunir en un point de la rétine, ce point est ébranlé par la somme ou la différence de leurs actions, et la sensation qui en résulte en est plus ou moins vive. Mais, lorsque cette coïncidence n'est qu'approchée, comme lorsque deux systèmes d'ondes émanent d'origines qui paraissent à l'œil tellement rapprochées, que leurs images sur la rétine semblent se confondre et ne former qu'un seul point, on ne peut distinguer les impressions ; ou plutôt, l'action mécanique exercée sur un point de la rétine se fait sentir en un autre point, à travers la substance de l'organe, et l'on éprouve ainsi une sensation correspondante à l'effet moyen des deux actions. Si les rayons qui frappent les points contigus de la rétine sont d'égale intensité et dans un état d'opposition complète, ils se détruisent mutuellement comme s'ils coïncidaient en un point mathématique; s'ils se trouvent dans un état d'accord parfait, leurs effets s'ajoutent; et ainsi de suite pour les états intermédiaires.

697. — Pour bien comprendre ce phénomène, il faut

considérer que l'impression produite par la lumière paraît s'étendre sur la rétine à une distance extrêmement petite autour du foyer des rayons concentrés par les lentilles de l'œil. C'est ainsi que l'image d'une étoile n'est jamais un point, mais un disque d'un diamètre sensible, et d'autant plus grand que la lumière est plus forte; c'est ainsi que la partie lumineuse de la lune à son premier quartier paraît plus large que l'autre, dont la clarté est beaucoup plus faible : cet effet se nomme *irradiation*, et résulte évidemment de la nature même de l'organe de la vue, comme nous l'avons remarqué plus haut.

698. — Il s'ensuit que, si des ondes émanent de points indiscernables *à l'œil* par leur proximité *apparente*, on peut les regarder, en n'ayant égard qu'à leurs effets sur l'œil, comme propagées suivant une même ligne droite, qui est la direction du rayon moyen. Leurs interférences seront les mêmes que si l'œil était dépourvu de lentilles, et que la rétine fût un simple écran où les rayons tombassent en un point physique (celui de la réunion des images par les lentilles de l'œil), et auquel les ondulations interférentes propagées simultanément des deux origines communiquassent une vibration égale à leur résultante.

699. — Cela posé, nous pouvons maintenant apprécier l'explication que la théorie ondulatoire donne des phénomènes produits par la combinaison de lames d'épaisseur différente. Ils furent observés pour la première fois par le docteur Young, qui s'exprime en ces termes :

« En regardant une chandelle au travers de deux morceaux de verre plans, entre lesquels se trouvait un peu d'humidité, j'aperçus des espèces de franges semblables à celles que donnent les lames minces : je trouvai que ces nouvelles franges étaient dans la même direction que les franges produites par la réflexion ; seulement elles étaient plus larges. En examinant les verres à la loupe, je remarquai que, par-

tout où il y avait des franges, l'eau était mêlée d'air; ce qui lui donnait l'apparence de la rosée.

« Il est aisé d'assigner les deux groupes de rayons qui formaient ces franges : car, la lumière transmise par l'eau se mouvant dans ce milieu avec une vitesse différente de celle de la lumière qui passait par les interstices remplis d'air seul, les deux groupes interféraient et produisaient une coloration conforme à la loi générale. Le rapport des vitesses dans l'eau et dans l'air étant celui de trois à quatre, les franges doivent paraître aux endroits où l'épaisseur est six fois plus grande que celle qui donne la même couleur dans le cas des lames minces ordinaires. En faisant l'expérience avec un verre plan et une lentille légèrement convexe, je trouvai que le premier cercle obscur avait le même diamètre que le sixième anneau obscur dans l'expérience des lames minces. On obtient des couleurs avec la même facilité, en substituant à l'eau du beurre, du suif ou de l'huile, et les anneaux deviennent plus petits en raison de la densité réfringente de la substance grasse; mais, quand on remplit d'eau les interstices de l'huile, les anneaux s'élargissent considérablement : car alors il faut avoir égard à la différence des vitesses dans l'eau et dans l'huile, et celle-ci est beaucoup moindre que la différence des vitesses dans l'air et dans l'eau. Ces circonstances suffisent pour nous rassurer sur la vérité de l'explication, et l'on peut s'en convaincre encore davantage en inclinant les lames par rapport à la direction de la lumière : alors, au lieu de se dilater, comme dans l'expérience des lames minces, les anneaux se rétrécissent. Cet effet est la conséquence nécessaire de l'allongement des routes de la lumière qui traverse les deux milieux obliquement, et il est le même que si la lame était devenue plus épaisse. Il faut observer cependant que les couleurs ne se manifestent point dans toute l'étendue de la lumière transmise. Une petite portion de chaque pinceau traverse les bords de chaque gouttelette, et coïncide assez avec la lumière qui passe par les globules d'air environnants pour qu'il y ait interférence.

D'ailleurs il est aisé de démontrer qu'une grande partie de la lumière qui traverse l'eau se dissipe latéralement par réflexion à son entrée dans ce liquide, à cause de la concavité particulière qu'affecte chaque partie d'un fluide adhérent aux surfaces de deux verres; en outre, une grande partie de la lumière qui passe par l'air se dissémine par réfraction à la seconde surface : voilà pourquoi l'on voit les franges lorsque les lames ne sont pas interposées directement entre l'œil et l'objet lumineux. » (Young, *Trans. phil.*, 1802, *Sur certains cas de production de couleurs.*)

Nous ajouterons que, pour observer ces phénomènes avec facilité, il suffit de laisser sécher presque entièrement une goutte d'eau savonneuse entre deux verres plans, et de tenir ceux-ci entre l'œil et une chandelle ou l'image du soleil réfléchi par une surface polie. Si l'on se sert de deux verres convexes, ou d'un verre plan et d'un verre convexe, les franges seront disposées en anneaux.

—

§ VII. — *Des couleurs produites par des surfaces striées.*

Interférence des rayons réfléchis par des lignes très rapprochées. — Couleurs des stries. — Systèmes de lignes équidistantes. — Analogie prétendue entre les couleurs des surfaces striées et certaines espèces de sons. — Couleurs d'une toile d'araignée, etc.; de la nacre de perle.

700. — Si deux points susceptibles de réfléchir la lumière dans toutes les directions (deux petites sphères, par exemple, etc.) sont assez voisins pour que l'œil les confonde, et si les rayons qu'ils réfléchissent vers l'œil proviennent d'une origine commune, il y aura interférence. Si la lumière est homogène, son intensité variera périodiquement, et l'intervalle de retard sera proportionnel à la différence des routes ; si elle est blanche, la couleur du rayon réfléchi sera la même que

si ce rayon avait traversé une lame d'air d'une épaisseur égale à cette différence, sans être affaibli par le mélange du blanc.

Supposons (fig. 141) deux cylindres polis, A B C, *a b c*, extrêmement déliés, parallèles entre eux et perpendiculaires au rayon visuel.

Soit S un point lumineux, très éloigné par rapport à la distance entre les cylindres, et E l'œil placé de manière à recevoir les rayons réfléchis B E, *b* E, que nous supposerons assez rapprochés pour interférer.

La différence des phases des rayons, au moment où ils frappent la rétine, sera évidemment

$$2\pi \times \frac{(\mathrm{S}b + b\mathrm{E}) - (\mathrm{SB} + \mathrm{BE})}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{bx + by}{\lambda},$$

en supposant Bx et By perpendiculaires à Sb et à bE.

Nommant donc I et i les angles d'incidence des rayons S B, E B, dans le plan des axes des deux cylindres, dont nous désignerons la distance Bb par a, nous aurons pour différence des phases

$$2\pi \cdot \frac{a}{\lambda} (\sin \mathrm{I} + \sin i).$$

Ainsi, a restant la même, cette expression variera avec l'obliquité du rayon incident et du rayon réfléchi, par rapport au plan des axes : conséquemment, si l'on fait tourner ce plan autour d'un axe parallèle aux cylindres, on verra paraître une série de couleurs analogues à celles que transmettent les lames minces, mais beaucoup plus vives, comme celles que l'on voit par réflexion.

761. — Une strie extrêmement fine sur une surface polie peut être considérée comme une surface concave, cylindrique, ou courbe du moins, qui réfléchit également la lumière dans toutes les directions. Deux stries semblables menées parallèlement, que l'on ferait tourner autour d'un axe parallèle à leur direction commune, en les tenant exposées aux rayons

du soleil, affecteraient l'œil de couleurs successives analogues à celles des lames minces : c'est ce qu'on observe en effet.

Le docteur Young a trouvé, en examinant les raies tracées sur le verre, dans les échelles micrométriques de M. Coventry, que chacune était formée de deux lignes très fines exactement parallèles, et à une distance réciproque de $\frac{1}{10000}$ de pouce. En plaçant l'échelle de manière à réfléchir la lumière du soleil sous un angle constant, et en faisant varier l'inclinaison de l'œil, il trouva que le rouge le plus éclatant paraissait sous des angles dont les sinus suivaient la progression arithmétique 1, 2, 3, 4.

702. — Le docteur Wollaston, M. Barton et Fraunhofer, sont parvenus à tracer sur le verre et sur l'acier, avec une pointe de diamant, des lignes exactement parallèles, équidistantes, et séparées par un intervalle qui, dans certains cas, n'excédait pas un dix-millième de pouce. En appliquant l'œil contre la surface réfléchissante ou réfractante que couvrent ces stries, de manière à recevoir par réflexion la lumière d'un corps éloigné, très brillant, et d'un petit diamètre apparent, on remarque, dans le plan du rayon visuel, des spectres dont il est aisé de concevoir la formation : ils sont disposés suivant une ligne droite, perpendiculaire aux stries et passant par l'image réfléchie et incolore ; leurs distances angulaires, l'ordre de leurs couleurs, etc., sont tels que les donne la théorie précédente ; leur éclat dépend de la parfaite égalité des intervalles entre les stries : c'est cette égalité qui fait coïncider précisément à la même distance de l'image principale les images latérales réfléchies par chaque couple ; ce qui multiplie l'effet. Si ces intervalles sont inégaux, les images des différents couples ne coïncident pas ; les couleurs se mêlent et produisent une traînée de lumière blanche. Telle est la cause de ces rayons que l'on voit jaillir des surfaces irrégulièrement polies, comme s'ils émanaient d'un corps lumineux. Si l'on transmet à de la cire à cacheter, ou à d'autres corps mous, l'empreinte d'une surface striée, on obtient les mêmes ap-

parences. C'est en imprimant, au moyen d'une forte pression, les stries d'une plaque d'acier sur un métal plus tendre, qu'on parvient à fabriquer des boutons et d'autres objets de luxe qui imitent le jeu du diamant.

703. — Le docteur Young a comparé la couleur produite par un rayon de lumière blanche qui vient frapper une suite de lignes équidistantes, à l'effet musical produit par un son qui est répété en écho par une série de lattes équidistantes, dont les surfaces planes sont perpendiculaires à la direction de la barre dans laquelle elles sont enchâssées, comme une grille de fer : il est évident que de tels échos frapperont l'oreille successivement et à des intervalles égaux, chacun étant égal au temps employé par le son à traverser deux fois l'espace qui sépare les lattes; ce qui doit produire sur l'oreille l'effet d'un son musical, si les lattes sont en assez grand nombre. (*Trans. phil.*, 1801, *Sur la théorie de la lumière et des couleurs.*)

Cette explication nous semble cependant plus ingénieuse que satisfaisante. La gravité du son musical produit par les échos est indépendante de la *qualité* du son répété, qui peut n'être qu'un simple *bruit*, c'est-à-dire un son composé de vibrations non périodiques. D'ailleurs, pour obtenir ce son musical, il faut que les lattes soient assez nombreuses pour que les échos se prolongent pendant un temps appréciable.

La lumière réfléchie par des stries parallèles dépend au contraire de la couleur du rayon incident : elle est rouge si ce rayon est rouge, jaune s'il est jaune, etc., et l'expérience réussit aussi bien avec deux stries qu'avec mille. C'est l'intensité et non la couleur, la vivacité et non la fréquence de l'impression produite sur la rétine, qui sont modifiées par l'interférence des rayons réfléchis.

Nous avons cru nécessaire de signaler cette erreur, d'autant plus qu'elle est devenue presque populaire, parce qu'elle paraît ingénieuse et plausible au premier abord, tandis qu'elle

n'est réellement propre qu'à donner une fausse idée de l'analogie qui existe entre le son et la lumière.

704. — Une simple raie dans une surface peut produire des couleurs par l'interférence des rayons réfléchis par ses bords, comme l'a remarqué lui-même le grand physicien que nous venons de citer. Souvent un fil d'araignée brille, au soleil, des plus vives couleurs : cet effet peut être dû à une cause semblable à celle qui a été précédemment indiquée, ou à la nature même du fil que l'insecte forme par l'agglutination de plusieurs autres plus déliés; ce qui doit lui donner une apparence striée et non cylindrique.

705. — Les phénomènes dus à la réflexion ou à la réfraction de la lumière par la surface polie de la nacre de perle dépendent du principe précédent, du moins en ce qui tient à la structure de la surface : ils ont été décrits par le docteur Brewster, dans les *Transactions philosophiques* de 1814, page 397.

Dans le *Journal philosophique d'Edimbourg* (vol. 2, page 117) il est fait mention de plusieurs propriétés remarquables qui résultent de la composition singulière de ce corps. Chacun sait que la nacre est l'intérieur de l'écaille d'une certaine espèce d'huître : elle se compose de lames extrêmement minces d'une substance élastique, quoique très dure, disposées parallèlement à la surface intérieure de l'écaille, qui est d'une forme assez irrégulière. Quand on la plane et qu'on la polit, la surface artificielle que l'on obtient ainsi coupe les surfaces naturelles des lames suivant des courbes onduleuses, qui sont plus ou moins rapprochées entre elles, suivant l'obliquité de l'intersection. Comme ces lames n'ont qu'une adhérence imparfaite, leurs extrémités se brisent par l'action des poudres, etc., qui servent à les travailler; de manière qu'elles présentent une suite de sillons ou d'aspérités à peu près parallèles et à égale distance, en ne considérant toute-

fois qu'une petite portion de la surface. Si le poli n'est pas assez vif, on ne peut distinguer ces sillons.

La lumière réfléchie ou dispersée par les lames interfère et prend une teinte irisée dans la direction perpendiculaire aux stries; mais le phénomène est singulièrement modifié par la forme particulière des creux et des aspérités; ce qui provient sans doute de la structure cristalline de la perle. On ne saurait nier que les couleurs ne soient dues *uniquement* à la configuration de la surface, puisqu'on peut les transmettre par impression à la cire à cacheter, à la gomme, à la résine et même aux métaux, sans leur faire perdre beaucoup de leur éclat. En examinant l'empreinte au microscope, on trouve qu'elle offre une copie fidèle des stries de la surface, quoique celles-ci soient quelquefois à moins d'un trois-millième de pouce l'une de l'autre.

Nous renvoyons aux mémoires originaux le lecteur curieux de connaître davantage cette classe de phénomènes intéressants, dont la théorie n'est pas toujours exempte d'obscurité.

---

§ VIII. — *De la diffraction de la lumière.*

Franges extérieures à l'ombre d'un corps éclairé par un faisceau très mince; leurs couleurs ne dépendent point du corps qui projette l'ombre. — Méthode de Fresnel pour observer ces franges; leurs propriétés, leurs distances entre elles; elles se propagent en ligne courbe. — Les ombres visibles sont plus larges que les ombres géométriques. — Théorie de Newton sur l'inflexion de la lumière; comment il explique les franges. — Objections de Fresnel contre l'hypothèse de Newton. — Dilatation des franges dans le voisinage du point rayonnant. — Explication des franges par le docteur Young, d'après le système des ondulations. — Explication de Fresnel. — Règle pour déterminer l'éclairement d'un point sur un écran. — Estimation numérique des maxima et des minima. — Eclairement du bord de l'ombre géométrique. — Eclairement à l'intérieur de l'ombre. — Franges observées par Grimaldi dans des ombres étroites. — Observation fondamentale du docteur Young sur les interférences. — Franges cristées de Grimaldi. — Cas de diffraction au travers d'une petite ouverture circulaire. — Table des couleurs de la tache centrale et des anneaux qui

l'entourent. — Analyse de cette table par Fresnel. — Eclairement de la tache centrale comparé à l'éclairement total : théorème de Fresnel. — Les couleurs sont celles des anneaux réfléchis. — Théorème de M. Poisson sur la clarté au centre d'une petite ombre circulaire. — Cas de diffraction au travers de deux ouvertures très rapprochées. — Expérience de Fresnel avec deux miroirs inclinés. — Effet de l'interposition d'un milieu plus dense quand les rayons interfèrent. — Déplacement des franges ; manière d'en faire l'expérience. — Argument contre le système corpusculaire. — Méthode d'Arago et de Fresnel pour déterminer les réfractions des gaz. — Expériences de Fraunhofer sur la diffraction et les interférences ; son appareil. — Franges produites par une seule ouverture étroite ; leurs dimensions. — Expérience de Newton avec deux lames de rasoir. — Cas où les deux bords de l'ouverture sont à des distances inégales de l'origine de la lumière. — Cas d'une petite ouverture circulaire. — Cas d'une très petite ouverture annulaire. — Interférence de plusieurs rayons qui passent par un réseau. — Spectres de seconde classe. — Rapport des espaces colorés ; lois auxquelles ils sont soumis. — Cas de réseaux très serrés ; manière de les construire. — Les spectres sont modifiés par la forme des stries qui composent le réseau. — Cas de réseaux inclinés ; spectres de seconde classe non symétriques. — Considérations théoriques. — Formule de Fraunhofer. — Longueurs d'ondulation assignées par Fraunhofer aux rayons B, C, D, etc. — Spectres de diffraction produits par la lumière réfléchie. — Spectres produits par des réseaux composés. — Modifications des phénomènes. — Spectres de première classe. — Spectres de troisième classe : leurs modifications lorsque le nombre des rayons interférents vient à augmenter ; formule qui les concerne. — Transition des spectres imparfaits aux spectres parfaits de seconde classe. — Substitution de trois petites ouvertures aux réseaux. — Anneaux qui bordent les étoiles vues au télescope. — Faux disques des étoiles. — Explication des anneaux d'après le principe des interférences. — Phénomènes produits par des ouvertures de diverse figure. — Ouvertures circulaires ; ouvertures annulaires. — Autre série d'anneaux. — Image produite par une ouverture triangulaire. — Diaphragme triangulaire qui sert de micromètre de position. — Cas de trois ouvertures circulaires. — Ouvertures carrées. — Effet produit par un très grand nombre d'ouvertures carrées.

706. — Quand un objet reçoit un faisceau de lumière excessivement mince, ou qu'il se trouve placé dans un cône de rayons divergeant d'un point presque géométrique, comme lorsqu'un rayon solaire passe dans une chambre obscure par un trou d'épingle, ou plutôt par une ouverture plus grande derrière laquelle se trouve une lentille d'un court foyer qui produit une image brillante du soleil et fait diverger les rayons dans toutes les directions, l'ombre de cet objet est bordée, à l'extérieur, d'une série de franges colorées, d'autant plus distinctes que le diamètre angulaire du point lumineux est plus petit quand on l'observe à la distance de

l'objet. Si ce diamètre augmente, les ombres et les franges provenant de chaque point du luminaire empiètent les unes sur les autres, altèrent les couleurs et produisent ce qu'on appelle la *pénombre* de l'objet. Dans le cas contraire, l'ombre est bien tranchée et les franges sont nettement terminées.

707. — Ce phénomène fut décrit pour la première fois par le père Grimaldi, dans un ouvrage intitulé *Physico-mathesis de lumine*, Bologna, 1665, et ensuite avec beaucoup plus de soin par Newton, dans le troisième livre de son *Optique*. Les franges entourent les objets de forme quelconque et gardent toujours la même distance entre elles, comme les lignes qui marquent les côtes de la mer sur une carte géographique. Seulement, partout où les objets ont un angle saillant et aigu, les franges s'arrondissent autour du sommet, et partout où l'angle est rentrant, elles se croisent et viennent toucher l'ombre de chaque côté sans interférer ou se confondre. A la lumière blanche, on n'en aperçoit que trois dont les couleurs, à partir de l'ombre, sont : 1° le noir, le violet, le bleu foncé, le bleu léger, le vert, le jaune, le rouge; 2° le bleu, le jaune, le rouge; 3° le bleu pâle, le jaune pâle, le rouge pâle. A la lumière homogène, elles sont beaucoup plus nombreuses et de différente largeur, suivant la couleur de la lumière, les plus étroites étant données par le violet et les plus larges par le rouge, comme dans les anneaux colorés. C'est la superposition de ces diverses franges qui produit la variété des teintes, et même la destruction des couleurs à une petite distance de l'ombre.

708. — Les franges sont absolument indépendantes de la nature du corps dont elles entourent l'ombre, et de la forme de ses bords. Ni la densité de la matière, ni l'irrégularité des contours, n'ont la moindre influence sur leur largeur, leurs couleurs ou leur distance à l'ombre : il est donc indifférent d'employer, pour les obtenir, le dos ou le tranchant d'un ra-

soir, une masse de platine, ou une bulle d'air dans une lame de verre (1).

D'après cette remarque, il est clair que leur cause n'a aucune connexion avec le pouvoir réfringent ni avec certaines attractions ou répulsions *électives* que les corps exercent sur la lumière : car on ne peut regarder de telles forces comme indépendantes de la densité du corps, quelque peu d'étendue que l'on suppose à sa sphère d'action.

709. — Pour examiner et mesurer les franges, Newton les recevait sur une surface blanche et polie ; mais Fresnel les faisait tomber sur un verre usé à l'émeri pour éviter l'inconvénient d'intercepter la lumière en se plaçant vis-à-vis : il pouvait ainsi les mesurer derrière le verre et les observer à la loupe. Il s'aperçut ainsi qu'elles restaient visibles au foyer de la lentille, et que même elles étaient beaucoup plus brillantes lorsqu'il enlevait l'écran de verre, comme si elles se fussent peintes dans l'air. Cette heureuse remarque lui permit de se passer tout-à-fait d'écran, et de prendre toutes ses mesures au micromètre, avec une précision plus grande que par toute autre méthode, telle enfin que l'exigeait la délicatesse de l'expérience. En effet, il est évident que les franges étant vues de la même manière que si elles étaient reçues sur un écran au foyer, elles peuvent être considérées comme une image optique quelconque formée au foyer d'un télescope.

Quelle que soit, du reste, la méthode que l'on emploie, on observera toujours les faits suivants :

PHÉNOMÈNE I.

710. — Toutes choses égales d'ailleurs, la distance des

(1) Cette bulle, quoique transparente, projette une ombre en dispersant la lumière qui tombe à sa surface.

franges entre elles et du bord de l'ombre diminue lorsque l'écran, ou le plan au foyer de la lentille sur lequel elles se peignent, vient à se rapprocher du bord de l'objet opaque jusqu'au contact; de manière qu'elles paraissent provenir des bords de l'objet.

Phénomène II.

711. — Cependant elles ne se propagent point en ligne droite, à partir de ces bords, jusqu'à une certaine distance, mais suivant des hyperboles dont les sommets sont tangents aux contours du corps opaque : ce n'est donc pas *la même lumière* qui produit la même frange à toutes les distances.

Concevons, pour nous rendre compte de cette particularité, que l'on ait mesuré exactement les distances des franges entre elles et à l'ombre, en faisant varier continuellement leur distance du corps opaque : si elles se propageaient en lignes droites, et si chacune était réellement l'axe d'un pinceau émanant de chaque point du bord de l'objet, les intervalles des franges entre elles et leurs distances à l'ombre devraient être proportionnels à leurs distances du bord; mais il n'en est pas ainsi. Les distances à l'ombre croissent trop rapidement quand le corps s'éloigne, et trop lentement quand il s'approche, pour être soumises à la loi de simple proportionnalité : on reconnaît alors que le lieu géométrique de chaque frange est une hyperbole qui a sa convexité tournée vers l'ombre. Dans la fig. 142, O est le point lumineux, A le bord de l'objet, G H un écran perpendiculaire à la droite O A, C le bord de l'ombre *visible*, et D, E, F, les points minima de trois franges qui se suivent.

Ces points se trouvent tous sur une perpendiculaire au bord de l'ombre. Si l'on rapproche l'écran du corps A, comme en gh, et que c, d, e, f, soient les points correspondants à C, D, E, F, les lieux de ces points seront les hyperboles AcD, AdD, etc.

712. — Il est bon d'observer que le bord C de l'ombre visible n'est point le même que B, bord de l'ombre *géométrique*, qui est déterminé par le prolongement de O A. Cette différence est difficile à saisir quand il s'agit d'un corps un peu gros; mais elle devient très sensible pour de petits objets (un cheveu, par exemple) quand on les éclaire avec un faisceau tel que nous l'avons supposé précédemment : ce fait a été remarqué par Grimaldi.

La limite de l'ombre visible suit la même loi de propagation curviligne que les franges. Newton a trouvé qu'un cheveu d'un 280e de pouce de diamètre, placé à 12 pieds du point lumineux, projetait :

A une distance de 4 pouces, une ombre d'une largeur égale à un 60e de pouce (plus de 4 fois le diamètre du cheveu);

A 2 pieds, une ombre d'une largeur égale à un 28e, ou 10 fois le diamètre du cheveu;

A 10 pieds, une ombre dont la largeur n'était que d'un 8e, ou 35 fois le diamètre du cheveu, tandis qu'elle aurait dû être de 120 fois ce même diamètre, si la route des rayons eût été rectiligne, ou, pour parler plus exactement, si l'ombre eût été terminée par des lignes droites.

713. — Pour expliquer ces phénomènes remarquables, Newton suppose que les rayons qui passent à une certaine distance des bords d'un corps quelconque sont détournés par une espèce de force répulsive, et que ceux qui en approchent le plus sont aussi le plus puissamment écartés, comme on peut le voir dans la fig. 143, où X est une section du cheveu, et où A D, B E, C F, etc., représentent des rayons qui passent à côté, à des distances différentes, et dévient, suivant D G, E H, F I, etc., sous des angles qui diminuent rapidement quand la distance augmente. Il est clair que la courbe W Y Z, à laquelle sont tangents tous ces rayons infléchis, sera convexe du côté de la lumière inci-

dente : c'est donc une véritable caustique. Sa courbure la plus grande sera au sommet W, à partir duquel elle diminuera en s'éloignant de X.

Telle sera la limite de l'ombre visible.

714. — Pour rendre compte des franges, Newton suppose (*Optique*, liv. 3, 3e question) 1° que chaque rayon qui passe près d'un corps éprouve une suite d'inflexions vers l'intérieur et vers l'extérieur, indiquées (fig. 144) par *a*, *b*, *c*; 2° que les molécules lumineuses qui composent ce rayon se détachent aux points d'inflexion (ou en d'autres points déterminés) de la courbe sinueuse qu'elles décrivent en vertu des accès dans lesquels elles se trouvent ou de circonstances particulières. Les unes s'échappent au dehors de l'objet, selon des directions telles que *a*A, *b*B, *c*C, *d*D, et les autres (dont il n'est pas question ici) se rapprochent du corps suivant *a*α, *b*β, *c*γ, etc. : les premières forment visiblement autant de caustiques, semblables à celles que nous avons décrites plus haut, qu'il y aura de rayons infléchis vers l'extérieur, et chaque caustique interceptée par un écran y marquera le point maximum d'une frange. Cependant les intervalles entre les caustiques, ou les points minima, ne seront pas tout-à-fait noirs, parce que les rayons provenant d'autres caustiques se croisent aux confins de l'ombre ou des franges intérieures, et vont éclairer partiellement tout l'espace environnant. Ainsi le nombre des franges doit être moindre, et la dégradation des teintes plus rapide que dans les anneaux colorés.

715. — La théorie précédente explique parfaitement la propagation curviligne des franges, leur prompte dégradation, leur origine à l'extrémité des corps, puisque chaque caustique aboutit à la même extrémité A (fig. 142). Elle n'explique pas moins bien l'éclat remarquable de ces franges, de la première, surtout, qui possède toute la lumière qui devait passer dans l'espace BC, entre l'ombre visible et l'om-

bre géométrique. Il paraîtrait donc que, dans son excellent ouvrage *Sur la diffraction de la lumière* (§ 1, pages 15, 17, 19), Fresnel n'aurait avancé contre la théorie de Newton que des objections puériles et tout-à-fait indignes de lui, provenant d'une idée très imparfaite qu'il aurait conçue de la doctrine qu'il attaque. Et certes, si l'hypothèse de Newton n'offrait pas d'autres difficultés, on pourrait nous blâmer avec justice si nous la condamnions aussi légèrement. Mais il est d'autres objections beaucoup plus sérieuses, alléguées par l'illustre physicien que nous venons de citer, qui se rapportent à un phénomène dont la théorie des forces répulsives paraît incapable de rendre compte. Nous devons ajouter, pour l'honneur de Newton, que ce phénomène semble lui avoir échappé, sans quoi il aurait été frappé de son importance.

Phénomène III.

716. — Approchons maintenant le corps opaque A du point lumineux O (fig. 142), sans rien changer aux dispositions précédentes : on voit alors les franges qui se forment derrière A, à la même distance que ci-devant, s'élargir beaucoup, en conservant néanmoins les mêmes distances entre elles et le bord de l'ombre. Ce fait est évidemment incompatible avec l'hypothèse d'une force répulsive émanant du corps opaque : car on ne conçoit pas comment une force semblable dépendrait de l'espace parcouru par la lumière depuis un autre point absolument étranger à ce corps.

717. — Le docteur Young explique les franges diffractées, d'après le système ondulatoire, en supposant que les rayons qui passent près du corps opaque interfèrent avec ceux qui, en se réfléchissant obliquement sur le bord, ont perdu une demi-ondulation, comme dans le cas des anneaux. On conclut de cette hypothèse qu'il doit y avoir une série de franges propagées suivant des hyperboles, et exactement semblables à celles que l'on observe réellement.

Cependant Fresnel a démontré qu'il existe, quant aux lieux des franges, une différence légère, mais sensible, entre les résultats du calcul et ceux de l'observation. D'ailleurs, remarque-t-il, lors même que cette explication serait juste, il est bien difficile de concevoir alors comment les franges ne dépendent aucunement de la figure des bords, surtout lorsqu'ils sont fort tranchants. Dans ce dernier cas, la petite quantité de lumière dont on peut, à la rigueur, admettre la réflexion, serait insuffisante pour interférer avec celle qui passe à côté du corps, de manière à former des franges si brillantes. Ces objections nous paraissent d'autant mieux fondées que l'hypothèse de la réflexion par les bords est tout-à-fait superflue, et qu'à l'aide des ondulations et des interférences on peut expliquer rigoureusement tous les phénomènes, en regardant le corps opaque comme un simple obstacle qui s'oppose à la propagation des ondes émanant du point lumineux.

718. — Considérons une onde A M F émanant de O, dont toute la lumière à la droite de A est interceptée par le corps opaque A G; et un point P derrière A, à la distance A B, que nous regarderons comme éclairé par les ondulations qui émanent simultanément de chaque point de la portion A M F, selon la théorie exposée à l'art. 628. Pour plus de simplicité, nous n'aurons égard qu'aux ondulations qui ont lieu dans un plan.

Faisons

$$A O = a, \quad A B = b, \quad \lambda = \text{la longueur d'une ondulation};$$

et, menant d'une manière quelconque la droite P N vers un point voisin de M, posons

$$P F = f, \quad N M = s, \quad P B = x.$$

Du centre P, supposé très près de B, avec le rayon P M, nous décrirons le cercle Q M, et nous aurons

$$f = \mathrm{PQ} + \mathrm{QN} = \sqrt{(a+b)^2 + x^2} - a + \mathrm{QN}$$

$$= b + \frac{x^2}{2(a+b)} + \mathrm{QN}.$$

Or Q N est la somme des sinus verses de l'arc s rapportés aux rayons O M et P M : sa valeur est par conséquent

$$\frac{s^2}{2\,\mathrm{OM}} + \frac{s^2}{2\,\mathrm{PM}} = \frac{s^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{a+b}{2ab} \cdot s^2;$$

de manière que

$$f = b + \frac{x^2}{2(a+b)} + \frac{(a+b)s^2}{2ab}.$$

Maintenant, si nous reprenons l'expression générale du mouvement produit par une portion limitée d'une onde lumineuse (art. 632), et propagé jusqu'en P, nous aurons d'abord

$$\alpha \cdot \varphi(\theta) = 1,$$

parce qu'on peut regarder l'obliquité de toutes les ondulations provenant de la partie efficace de la surface A M N comme absolument insensible, aussi long-temps que P est à une distance de A très grande en comparaison de la longueur d'une ondulation.

En outre, comme nous n'avons égard qu'aux ondulations propagées dans un seul plan, la formule générale se réduit à

$$\mathrm{V} = \int ds \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{f}{\lambda}\right);$$

et l'expression correspondante pour les excursions d'une molécule vibrante en P sera

$$\mathrm{X} = \int ds \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{\mathrm{T}} - \frac{f}{\lambda}\right).$$

Remplaçant f par sa valeur, et posant

$$2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{b}{\lambda}-\frac{x^2}{2\lambda(a+b)}\right]=\theta,\quad s\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}=v,$$

si l'on considère que t et x restent constants, tandis que s seul varie, la dernière formule deviendra

$$X=\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\cdot\left[\cos\theta\cdot\int dv\cdot\cos\frac{\pi v^2}{2}+\sin\theta\cdot\int dv\cdot\sin\frac{\pi v^2}{2}\right];$$

ce qui montre que l'onde totale, à son arrivée en P, peut être considérée comme la résultante de deux ondes, $X'\cos\theta$ et $X''\sin\theta$, qui diffèrent d'un quart d'ondulation à leur origine, et dont les amplitudes X' et X'' sont données par les équations

$$X'=\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\cdot\int dv\cdot\cos\frac{\pi v^2}{2},$$

$$X''=\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}\cdot\int dv\cdot\sin\frac{\pi v^2}{2},$$

les intégrales étant prises entre les limites de v correspondantes à

$$s=-AM \quad\text{et}\quad s=+\infty.$$

Conséquemment, puisque

$$s=AM=PB\times\frac{a}{a+b}=\frac{ax}{a+b}$$

et que

$$v=s\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}},$$

les limites de v doivent être

$$v=-x\sqrt{\frac{2a}{(a+b)b\lambda}}\quad\text{et}\quad v=+\infty.$$

719. — Ainsi, pour déterminer l'intensité de la lumière, il faut commencer par calculer les valeurs des intégrales précédentes; ce qui fera connaître X' et X''.

La quantité $\sqrt{\chi'^2+\chi''^2}$ représentera alors l'amplitude de chaque vibration et la résultante commune (art. 615); la somme des carrés $X'^2+X''^2$ désignera l'intensité de la lumière, ou l'impression produite sur rétine.

720. — Dans son ouvrage sur la diffraction, Fresnel donne une table des valeurs de ces intégrales, pour des limites qui croissent successivement depuis o jusqu'à ∞ : on prouve facilement que les intégrales se réduisent toutes deux à $\frac{1}{2}$ à cette dernière limite. Au moyen de ces valeurs il trouve que l'intensité de la lumière hors de l'ombre géométrique varie par une suite de maxima et de minima, conformément à la table suivante :

Table des maxima et des minima dans les franges extérieures, et des intensités de la lumière qui y correspondent.

	VALEURS de *v*.	INTENSITÉS de la lumière.
1er maximum	1.2172	2.7413
1er minimum	1.8726	1.5570
2e maximum	2.3449	2.5990
2e minimum	2.7392	1.6867
3e maximum	3.0820	2.3022
3e minimum	3.3913	1.7440
4e maximum	3.6742	2.2523
4e minimum	3.9372	1.7783
5e maximum	4.1832	2.2206
5e minimum	4.4160	1.8014
6e maximum	4.6069	2.1985
6e minimum	4.8479	1.8185
7e maximum	5.0500	2.1818
7e minimum	5.2442	1.8317

Il est à remarquer qu'aucun minimum n'est zéro, et que la différence entre les maxima et les minima successifs décroît très rapidement quand les valeurs de v augmentent; ce qui explique la prompte dégradation des teintes.

721. — Si le point P était précisément au bord de l'ombre géométrique, son éclairement serait, d'après cette théorie,

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Pour comparer cette valeur avec l'éclairement du même point, lorsqu'on enlève le corps opaque, il suffit de considérer qu'à une grande distance de l'ombre la lumière doit être la même, que le corps opaque soit enlevé ou non. Or la limite comprise entre les maxima et les minima est 2 : ce nombre représente donc l'éclairement uniforme au-delà des franges, et la lumière au bord de l'ombre géométrique est le quart de la clarté totale produite par le point lumineux.

722. — En rendant négatif s ou v, on a l'éclairement à l'intérieur de l'ombre : ce changement donne d'autres limites aux intégrales, sans altérer leurs valeurs. Celles-ci doivent être prises, dans ce cas,

$$\text{depuis } v = +x\sqrt{\frac{2a}{(a+b)b\lambda}} \text{ jusqu'à } +\infty.$$

Les calculs ont été effectués par Fresnel, qui n'a observé aucun accroissement ou décroissement périodique, mais une dégradation rapide et constante jusqu'à l'obscurité parfaite.

723. — L'ombre visible n'est point marquée par la disparition subite de la lumière : c'est l'œil seul qui juge de sa limite. Si l'on regarde comme l'ombre visible tout l'espace qui est moins éclairé que la partie de l'écran au-delà des

franges, elle s'étendra beaucoup au-delà de l'ombre géométrique; ce qui explique l'élargissement extraordinaire des ombres des petits corps.

724. — Pour déterminer les largeurs des franges, il ne s'agit que de tirer les valeurs de x de l'équation

$$x = \nu \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2} \cdot \frac{(a+b)\,b}{a}},$$

dans laquelle ν prend successivement toutes les valeurs données dans la table précédente. En considérant les variations qu'éprouve x par les valeurs successives de a et de b, on reconnaîtra la cause de la propagation curviligne des franges et de leur dilatation à l'approche du point lumineux. En effet, en regardant l'équation entre b et x comme celle d'une frange quelconque, considérée comme une courbe, dont AB (fig. 145) serait l'abscisse et BP l'ordonnée, on a

$$x^2 = \nu^2 \cdot \frac{\lambda}{2}\left(b + \frac{b^2}{a}\right);$$

ce qui est l'équation d'une hyperbole dont la convexité est tournée du côté de l'ombre, et qui passe par le point A.

D'un autre côté, si l'on regarde a comme variable et b comme constant, on voit qu'à la même distance de l'écran, les largeurs des franges croissent à mesure que a diminue, les accroissements de leurs carrés étant directement proportionnels à la divergence des rayons lorsque ceux-ci perdent leur parallélisme.

De plus, quand $\lambda = a = b$, x étant proportionnel à ν, les largeurs des franges sont toujours entre elles dans le même rapport, et forment une progression semblable à celle des valeurs de ν dans la table précédente.

Enfin ces mêmes largeurs sont, pour des rayons de différente couleur, comme les racines carrées des longueurs d'ondulation de ces rayons.

725. — L'accord de la théorie avec l'expérience, pour ce qui regarde la largeur des franges et leur distance de l'ombre, a été soumis à une épreuve sévère par Fresnel, et reconnu d'une exactitude parfaite. Il serait à désirer cependant qu'il eût décrit avec un peu plus de soin les moyens mécaniques dont il s'est servi pour déterminer la place du bord de l'ombre géométrique, qu'il a pris pour point de départ. Comme ce bord ne jouit d'aucune propriété de maximum ou de minimum, il doit rester toujours un peu d'incertitude quand il faut en juger à la simple vue; ce qui n'influe, du reste, aucunement sur le résultat définitif, puisque les intervalles entre les franges sont très nettement marqués et susceptibles d'être mesurés avec beaucoup de précision. La dilatation des franges dans le voisinage du point lumineux est peut-être l'argument le plus fort que l'on ait jamais fait valoir en faveur du système ondulatoire, et le plus contraire à celui de l'inflexion. Il paraît bien difficile de concilier avec l'idée qu'on se forme du mode d'action des forces corpusculaires celle d'une force répulsive exercée par l'extrémité d'un corps sur un rayon qui passe à côté, de manière à dépendre de la distance parcourue par le rayon avant d'arriver à ce bord depuis une origine arbitraire. Fresnel a tiré le plus grand parti de cet argument dans l'ouvrage précité.

726. — Outre les franges extérieures décrites plus haut, il en est d'autres qui se forment dans l'ombre de certains corps, et qui donnent lieu à des applications curieuses du principe des interférences. La première classe de ces phénomènes fut signalée par Grimaldi : il trouva qu'en faisant tomber sur un écran, à une certaine distance, l'ombre d'un corps long et étroit que l'on tient dans un faisceau de rayons divergents, il se forme, dans l'ombre et dans le sens de sa longueur, des raies ou franges alternativement plus brillantes et plus obscures que le reste; leur nombre augmente ou diminue, selon que la distance est plus ou moins grande entre

l'ombre et le corps par rapport à la largeur de ce dernier.

Pour les étudier plus en détail, le docteur Young fit passer un rayon solaire par un trou percé dans une feuille de papier avec une aiguille très fine, et observa, à différentes distances, l'ombre d'une carte qui n'avait qu'un trentième de pouce de diamètre. Ayant remarqué que l'ombre était divisée en bandes parallèles, mais que celle du milieu était toujours blanche, il prouva, d'une manière incontestable, que ces bandes provenaient de l'interférence des rayons qui passent des deux côtés de la carte, en interceptant la lumière de l'un des bords au moyen d'un écran placé entre la carte et l'ombre, qui laissait passer librement la lumière de l'autre bord, comme le représente la fig. 146, dans laquelle O est le trou, A B la carte, E F son ombre, et C D le corps interposé, dont le bord reçoit l'ombre du bord B de la carte. Lorsque l'appareil se trouve disposé de cette manière, toutes les franges de l'ombre disparaissent immédiatement, quoique la lumière infléchie par A suive toujours la même route; ce qui suppose nécessairement qu'elle subit une certaine modification par la proximité de celle qui vient du bord B. Le résultat est le même lorsque l'écran d'interception est placé en $c\,d$ devant B, de manière à projeter son ombre sur ce bord.

727. — Sans entrer dans une discussion minutieuse du phénomène précédent, quoique les formules déjà connues nous en donnent la faculté en considérant un point quelconque X, entre E et F, éclairé par l'onde *a* A B *b* moins la portion A B, nous nous contenterons de montrer comment se produisent les franges. D'ailleurs le sujet a été traité par Fresnel, avec le plus grand succès, dans le mémoire que nous avons déjà cité plusieurs fois. Joignons A X et B X : la différence des routes parcourues par les ondes qui arrivent en X par O A X, O B X, est égale à B X — A X, et nulle par conséquent au milieu de E F. Cette partie de l'ombre sera donc éclairée par une lumière double de celle qui est infléchie aux deux bords (art. 722), et le sera d'autant plus vive-

ment que l'ombre sera plus étroite; mais des deux côtés de la ligne médiaire la différence BX — AX augmente. Quand elle atteint la valeur d'une demi-ondulation, les ondes sont en opposition complète, et une raie noire succède de chaque côté à la raie lumineuse; à côté de celles-là viennent se ranger ensuite des raies lucides; et ainsi de suite.

728. — Le phénomène suivant, décrit par Grimaldi, est un cas particulier de l'expérience du docteur Young. Quand l'ombre est formée par un objet terminé par un angle droit, l'on observe, outre les franges ordinaires, deux ou trois alternations de couleur de chaque côté de la ligne qui partage cet angle en deux parties égales. Elles sont disposées suivant des courbes convexes du côté de la ligne de bisection, vers laquelle elles convergent à mesure qu'elles sont plus éloignées du sommet de l'angle. Ces franges sont l'effet de la lumière qui empiète sur l'ombre de chaque côté de l'angle de l'objet, et qui interfère comme dans le cas précédent. On le démontre par l'interposition d'un écran qu'on place à quelques pouces de l'objet, de manière à ne recevoir qu'un bord de l'ombre; ce qui fait disparaître toutes les franges; mais si l'on fait tomber sur l'écran l'extrémité de l'ombre projetée par l'angle de l'objet, les franges n'éprouvent aucune altération. (Young, Expériences et calculs relatifs à l'optique, *Trans. phil.*, 1803.)

729. — Tels sont les phénomènes les plus remarquables que manifestent les ombres des petits corps. Considérons maintenant l'effet de la transmission d'un faisceau à travers une très petite ouverture, que nous supposerons d'abord circulaire; mettons, par exemple, une feuille de plomb, percée d'un trou d'épingle, dans le cône des rayons lumineux qui divergent de l'image du soleil formée au foyer d'une forte lentille, et plaçons un oculaire convexe dans la direction de ce foyer et de l'ouverture. En regardant au travers de cet oculaire, l'image de l'ouverture paraît comme une ta-

che lumineuse entourée de cercles colorés très brillants, qui se rétrécissent ou s'élargissent, en éprouvant de singulières alternations de teintes quand la distance entre le trou et la tache lumineuse ou l'oculaire vient à varier. Si ce dernier verre est fort éloigné du trou, la tache au centre est blanche, et les anneaux suivent à peu près l'ordre des couleurs dans le phénomène des lames minces. Ainsi, pour un trou d'un 36e de pouce de diamètre, une distance (a) de 6 pieds 6 pouces du trou au point lumineux, et une distance (b) de 24 pouces du trou à l'oculaire, on a observé que les couleurs se succèdent de la manière suivante :

1er *ordre*. Blanc, jaune pâle, jaune, orangé, rouge indécis.

2e *ordre*. Violet, bleu pur, bleu blanchâtre, jaune verdâtre, beau jaune, rouge orangé très plein et très brillant.

3e *ordre*. Pourpre, bleu indigo, bleu verdâtre, vert pur et brillant, vert jaunâtre, rouge.

4e *ordre*. Vert prononcé, mais sombre et bleuâtre; blanc bleuâtre, rouge.

5e *ordre*. Vert indécis, blanc un peu bleuâtre, rouge pâle.

6e *ordre*. Vert très pâle, rouge très pâle.

7e *ordre*. Une legère teinte de vert et de rouge.

730. — Quand l'oculaire et le trou se rapprochent, la tache blanche au centre se réduit à un simple point, et finit par disparaître : les anneaux se resserrent alors de plus en plus, et passent successivement au centre, qui prend ainsi les nuances les plus vives et les plus intenses, tandis que les anneaux changent brusquement de couleur. Dans une expérience faite il y a quelques années (le 12 juillet 1819), on observa les teintes suivantes, la distance ($a + b$) entre l'oculaire et le point lumineux demeurant constante et le trou s'approchant de l'oculaire :

b =	COULEUR de la TACHE CENTRALE.	ANNEAUX ENVIRONNANTS.
24.00	Blanc	Tels que dans l'article précédent.
18.00	*Idem.*	Les deux premiers anneaux se confondent ; le rouge du 3e ordre et le vert du 4e sont magnifiques.
13.50	Jaune	Les anneaux intérieurs sont fort pâles ; le vert du 4e et du 5e ordre, et le rouge du 3e, 4e et 5e, sont de la plus grande pureté.
10.00	Orangé très intense	Tous d'une couleur très lavée.
9.25	Rouge orangé très chargé	*Idem.*
9.10	Rouge de sang très vif	*Idem.*
8.75	Rouge cramoisi foncé	*Idem.*
8.36	Pourpre foncé	*Idem.*
8.00	Violet très sombre.	Un large anneau jaune.
7.76	Bleu indigo intense	Un anneau jaune pâle.
7.00	Bleu pur et foncé.	Un anneau d'un jaune chargé.
6.63	Bleu céleste	Un anneau orangé, séparé de la tache par un cercle sombre et étroit.
6.00	Blanc bleuâtre.	Un anneau rouge orangé, suivi d'un large cercle de jaune pâle, après lequel les autres anneaux sont à peine visibles.
5.85	Bleu très pâle	Un anneau cramoisi.
5.50	Blanc verdâtre.	Un anneau pourpre, suivi d'un anneau jaune tirant sur l'orangé.
5.00	Jaune	Un anneau bleu et un orangé.
4.75	Jaune orangé	Le 1er, d'un bleu brillant ; le 2e, d'un rouge orangé ; le 3e, jaune pâle ; le 4e, blanc.
4.50	Écarlate.	Le 1er, jaune pâle ; le 2e, violet ; le 3e, jaune pâle ; le 4e, blanc.
4.00	Rouge	Le 1er ; blanc ; le 2e, indigo ; le 3e, d'un orangé indécis ; le 4e, blanc.
3.85	Bleu	Le 1er, blanc ; le 2e, jaune ; le 3e, bleu ; le 4e, d'un rouge indécis.
3.50	Bleu sombre	Le 1er, orangé ; le 2e, bleu pâle ; le 3e, violet ; le 4e, d'un orangé indécis.

731. — La série des teintes qu'offre la tache centrale est évidemment la même que celle des anneaux réfléchis dans l'expérience des lames minces, du moins jusqu'au point où elle s'arrête. Les couleurs environnantes sont très variables et ne paraissent soumises à aucune loi. Elles dépendent néanmoins d'expressions analytiques très compliquées, que nous épargnerons au lecteur, en nous bornant à présenter, d'après Fresnel, l'explication des changements de teinte que subit la tache centrale quand on l'expose à la lumière blanche, et les alternations de lumière et d'obscurité totale que produit la lumière homogène.

Soient a et b les distances depuis l'ouverture circulaire, dont le rayon est r, jusqu'au point lumineux et jusqu'à un écran placé derrière l'ouverture perpendiculairement au rayon qui passe par le centre. Détachons de l'ouverture un anneau quelconque d'un rayon $= z$ et d'une largeur $= dz$: cet anneau enverra à la tache centrale sur l'écran un système d'ondes dont l'intensité sera proportionnelle à l'aire de l'anneau, c'est-à-dire à $2\pi z\,dz$, mais dont la phase d'ondulation différera de celle du rayon central en raison de la différence de leurs routes. Or, en nommant f la distance de chaque point de l'anneau au centre de l'écran, on a

$$f^2 = b^2 + z^2;$$

et, si l'on nomme f' celle de ce même anneau au point lumineux, on a pareillement

$$f'^2 = a^2 + z^2:$$

de manière que $(f + f') - (a + b)$, différence des routes ou intervalle de retard, a pour valeur

$$\frac{z^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{z^2(a+b)}{2ab}.$$

Par là l'expression générale (art. 632) de l'amplitude de

l'onde totale, qui tombe au centre de l'écran dans ce cas particulier, équivaut à

$$X = \int 2\pi z\, dz \cdot \sin 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{z^2 (a+b)}{2ab\lambda} \right].$$

Effectuant l'intégration, que la forme de la différentielle rend aisée,

$$X = \frac{ab\lambda}{a+b} \left\{ \text{const} + \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{z^2 (a+b)}{2ab\lambda} \right] \right\}.$$

En étendant cette intégrale depuis $z = 0$ jusqu'à $z = r$, il vient

$$X = \frac{ab\lambda}{a+b} \left\{ \cos \lambda \left[\frac{t}{T} - \frac{(a+b)r^2}{2ab\lambda} \right] - \cos 2\pi \cdot \frac{t}{T} \right\}$$

$$= \frac{ab\lambda}{a+b} \left\{ \sin \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} + \left[\cos \frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda} - 1 \right] \cos 2\pi \frac{t}{T} \right\};$$

ce qui indique, comme nous l'avons déjà remarqué (art. 718), deux ondes partielles qui diffèrent d'un quart d'ondulation. En exprimant cette circonstance par

$$X = X' \cos \theta + X'' \sin \theta,$$

$\left(\theta \text{ étant égal à } \frac{t}{T}\right)$, comme nous l'avons fait précédemment, nous trouvons, pour l'intensité A^2 de l'onde résultante,

$$A^2 = X'^2 + X''^2 = 4 \left(\frac{ab\lambda}{a+b} \right)^2 \left[\sin \frac{\pi (a+b) r^2}{2ab\lambda} \right]^2.$$

732. — Pour faire usage de cette formule, il faut la comparer à celle qui donne l'éclairement direct du centre de l'écran dans le cas d'une ouverture infinie, c'est-à-dire dans celui où l'écran recevrait immédiatement la lumière du point lumineux. Cependant la formule précédente et le raisonnement que nous avons suivi jusqu'ici sont en défaut

dans cette occasion : car, en faisant r infini, on tombe sur une expression illusoire. D'ailleurs nous avons supposé, dans toute notre analyse, que la fonction $\varphi(\theta)$ de l'art. 631 était invariable; ce qui s'éloigne beaucoup de la vérité dans ce cas extrême. Il nous faut donc avoir recours à une autre méthode.

Or Fresnel a prouvé (les limites de ce traité nous obligent d'omettre sa démonstration) que l'éclairement total vaut le quart de la clarté que recevrait le centre de l'écran par une ouvertnre d'un diamètre tel, que la différence des routes d'un rayon passant par le centre et d'un autre diffracté à la circonférence fût exactement d'une demi-ondulation ; c'est-à-dire que le rayon de cette ouverture devrait satisfaire à la condition

$$\frac{r^2(a+b)}{2ab}=\frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad r=\sqrt{\frac{ab\lambda}{a+b}}.$$

En substituant alors cette valeur de r dans la formule précédente, et en nommant C l'éclairement total, il vient

$$C=\left(\frac{ab\lambda}{a+b}\right)^2 . \sin^2\frac{\pi}{2}=\left(\frac{ab\lambda}{a+b}\right)^2,$$

et conséquemment

$$A^2=4C\left[\sin\frac{\pi(a+b)r^2}{2ab\lambda}\right]^2.$$

733. — Dans cette expression, r, a et b, sont indépendants de λ : par conséquent, la valeur de A^2 est de la forme

$$4C\left(\sin 2\pi . \frac{\beta}{\lambda}\right)^2,$$

dans laquelle

$$\beta=\frac{(a+b)r^2}{4ab}.$$

Ainsi, en supposant qu'il émane du point lumineux des rayons de toute couleur, la teinte résultante, au centre de l'écran, sera représentée par

$$S\left[4\,C\,.\,\sin^2\left(2\,\pi\frac{\beta}{\lambda}\right)\right],$$

et sera la même (art. 673) que celle que réfléchit une lame d'air d'une épaisseur égale à β ou à $\frac{(a+b)\,r^2}{4\,a\,b}$, quantité qui augmente lorsque b diminue et que $a+b$ demeure constant. Ainsi s'explique maintenant la succession des couleurs rapportées dans la table de l'art. 730. Cette belle application des principes généraux de Fresnel, dont tout le mérite est dû à M. Poisson, comme Fresnel le dit lui-même, est d'autant plus satisfaisante que les expériences ont été faites avant que l'analyse en eût fait pressentir le résultat (1).

734. — Voici encore une autre propriété qui résulte des recherches de M. Poisson :

Le centre de l'ombre d'un très petit disque opaque exposé à la lumière divergeant d'un seul point est précisément aussi éclairé par les ondes diffractées qu'il le serait par la lumière directe si le disque n'existait pas.

Nous regrettons que la démonstration de ce singulier théorème ne puisse trouver place ici. M. Arago l'a soumis à l'épreuve de l'expérience, à l'aide d'un petit disque de métal cimenté dans une plaque de verre parfaitement homogène et diaphane : le succès a été complet.

735. — Quand la lumière passe par deux ouvertures égales et très rapprochées, les anneaux se forment autour de chacune comme si elle était seule. On observe, en outre,

(1) Cependant, dans nos expériences, nous avons trouvé des résultats moins conformes à la théorie pour les premiers ordres, surtout pour le vert du troisième ordre, qui manquait quelquefois entièrement.

une suite de franges serrées, droites, parallèles entre elles, et perpendiculaires au milieu de la droite qui joint les centres des ouvertures. Quand celles-ci n'ont pas le même diamètre, ces franges prennent la forme d'hyperboles ayant une des ouvertures pour foyer commun. Dans le cas d'ouvertures égales, on voit en outre deux systèmes de franges rectilignes et parallèles qui se coupent en forme de croix de saint André, et qui sont également inclinées par rapport aux franges précédentes. (Voy. fig. 147 et 148.) Lorsque les ouvertures sont fort nombreuses et de différentes formes, les phénomènes sont très variés et d'une beauté remarquable. Mais en voilà assez sur ce sujet.

736. — Fresnel a observé que, si l'on regarde à la loupe les images presque contiguës d'un point lumineux dont les rayons tombent sur deux miroirs plans très peu inclinés l'un sur l'autre, on aperçoit une série de franges perpendiculaires à la droite qui joint les deux images. Ces franges sont évidemment analogues à celles que donnent deux ouvertures égales. L'expérience est délicate : car, pour peu que les surfaces des réflecteurs se trouvent l'une au-dessus de l'autre, la différence des routes des rayons surpasse un petit nombre d'ondulations, et l'on n'aperçoit pas de franges. Cette observation est importante, car elle démontre clairement que les bords des ouvertures, dans l'expérience précédente, ne contribnent en rien à la production des franges, les rayons étant abandonnés entièrement à leur action mutuelle dès qu'ils ont quitté le point lumineux.

L'on obtient une série de franges tont-à-fait semblable si, au lieu de deux réflectenrs, on emploie nn verre plan d'un côté, et formant un angle obtns de l'autre, comme dans la fig. 149 : co verre, interposé entre l'oculaire E et le point rayonnant S, produit deux images, S et S', et l'interférence des rayons SE et S'E donne les franges en question.

737. — Puisque c'est la différence des routes des rayons

interférents qui produit les franges et qui détermine leur place par rapport aux images du point lumineux, il est évident que, si, en conservant les mêmes routes, on altère la *vitesse* relative des rayons pendant une partie de leur trajet, on produira le même effet : or on peut changer la vitesse d'un rayon en changeant le milieu qu'il traverse.

D'après le système ondulatoire, cette vitesse est plus grande dans un milieu rare que dans un milieu dense : par conséquent, si l'on met une lame d'un milieu plus dense que l'air sur la route d'un des rayons interférents, et perpendiculairement à sa direction, on augmentera l'intervalle de retard; ce qui équivaut à une prolongation de route. Ainsi une plaque épaisse d'un milieu dense, tel que le verre, fera disparaître les franges, dont l'apparition exige que la différence des routes soit très petite, en donnant tout à coup à l'intervalle de retard la valeur d'un grand nombre d'ondulations. Cependant, si l'on n'interpose qu'une lame mince, elles resteront visibles, mais elles changeront de place.

Par exemple, soient S A, S B (fig. 150), les rayons transmis par les petites ouvertures A, B, émanant du point S et reçus sur l'écran D C E : ils formeront une suite de franges, dont une C (celle du milieu) sera *blanche*.

Soient D, E, les franges obscures immédiatement adjacentes des deux côtés, et G une lame de mica placée sur la route d'*un* des rayons S A, et d'une épaisseur telle que le rayon, en la traversant, soit retardé précisément d'une demi-ondulation. Les rayons A E, B E, qui étaient en opposition complète avant qu'on eût interposé la lame, sont maintenant en état d'accord parfait, et conséquemment il se formera en E une frange lumineuse au lieu d'une frange obscure. D'un autre côté, le rayon A C sera maintenant à une demi-ondulation derrière B C, au lieu de s'accorder parfaitement avec ce rayon : de manière qu'il formera en C une frange obscure; et ainsi de suite. En un mot, le système de franges ne fera que changer de place, et aura reculé son milieu de C en E, c'est-à-dire qu'il se sera éloigné de la lame. Il est évident

que, si la lame G était plus épaisse, ce déplacement serait encore plus sensible.

738. — Le pouvoir réfringent du verre, et même de tous les milieux, à l'exception des gaz, est si grand, qu'une lame même assez mince jetterait les franges entièrement hors de vue. Au lieu d'une seule lame G, placée devant une des ouvertures, on en emploiera deux, G et *g*, d'épaisseur à très peu près égale, tels que seraient, par exemple, deux morceaux presque contigus d'un même plateau de verre, et on les mettra devant les deux ouvertures. On peut encore faire varier l'épaisseur de la lame traversée par chaque rayon en l'inclinant d'une quantité suffisante. Les effets que l'on observe alors sont tels que nous venons de les décrire : les franges changent de place sans éprouver d'altération.

Cette belle expérience est un argument indirect en faveur du système des ondulations, puisqu'elle prouve que les rayons lumineux sont *retardés* en traversant des milieux plus denses; ce qui est conforme à ce système et contraire à la doctrine corpusculaire.

739. — MM. Arago et Fresnel ont tiré parti de cette propriété pour mesurer les pouvoirs réfringents relatifs de différents gaz, à divers degrés de température, d'humidité, de pression, etc. Il est clair que, si l'on fait passer l'un des rayons interférents par un tube fermé aux deux bouts avec des plaques de verre, et l'autre au travers de deux plaques de verre semblables aux précédentes, mais sans tube, les franges paraîtront comme à l'ordinaire. Maintenant, si l'on fait le vide dans le tube, qu'on le chauffe, qu'on le refroidisse ou qu'on le remplisse d'un gaz d'une densité différente, les franges se déplaceront d'une quantité que l'on pourra mesurer avec la plus grande exactitude, si on les reçoit au foyer d'un micromètre. En comparant ce déplacement à la largeur des franges, on connaîtra le nombre d'ondulations perdues ou gagnées par le rayon que l'on considère, et par suite le rapport du pou-

voir réfringent de l'air à celui du milieu renfermé dans le tube dont on connaît la longueur. Cette méthode a ceci de particulier, qu'elle est susceptible d'une précision indéfinie, puisque rien ne limite la longueur des tubes et la perfection des micromètres.

740. — Les phénomènes de la diffraction, et ceux qui résultent de l'interférence de faisceaux très déliés émanant d'une origine commune, ont été l'objetdes recherches de Fraunhofer, qui s'en est occupé avec le plus grand soin et l'exactitude la plus scrupuleuse, en faisant usage d'un appareil très précis, qu'il avait imaginé et exécuté lui-même. Cet appareil se compose d'un théodolite répétiteur de 12 pouces, qui donne les angles de 4 en 4 secondes, et dont le cercle horizontal porte un disque circulaire de 6 pouces de diamètre, dont l'axe coïncide exactement avec celui du théodolite. Au centre de ce disque est un écran métallique vertical, percé d'une ou de plusieurs fentes, étroites, verticales et rectangulaires, et placé de manière que la fente du milieu coïncide avec l'axe de l'instrument. Sur le grand cercle et dans une position horizontale, est attachée une lunette dont l'objectif est à 3 pouces et demi du centre, et dont l'axe, dirigé exactement vers ce point, parallèlement au plan du limbe, est pourvu d'un micromètre dont les fils sont parfaitement verticaux.

L'instrument étant fixé sur un support de pierre, on fait passer un rayon solaire par une fente verticale très étroite, à l'aide d'un héliostat. Dans les expériences de Fraunhofer, la fente était à 463 pouces et demi du centre du théodolite, et sa largeur n'était que d'un centième de pouce. Le rayon traversait la fente et entrait dans la lunette : alors on observait les franges qui se formaient au foyer. Le grossissement de la lunette variait de 30 à 40.

741. — Fraunhofer a examiné le premier les franges produites par la diffraction au travers d'une seule ouverture, et à

déterminé leurs largeurs avec la plus grande précision, au moyen du *micromètre-microscope*, instrument avec lequel il assure avoir pu apprécier jusqu'à un cinquante-millième de pouce. La fente étant placée sur l'appareil, devant l'objectif de la lunette, qui était dirigée exactement vers l'ouverture de l'héliostat, on voyait l'image de cette ouverture entourée de franges latérales, que le grossissement changeait en spectres larges et brillants. Les distances des extrémités rouges de ces spectres au point du milieu, ou à l'image blanche du centre, étaient alors mesurées au micromètre. Les résultats d'un grand nombre d'expériences faites avec des ouvertures de un dixième à un millième de pouce étaient merveilleusement d'accord entre eux avec les lois suivantes :

1° *Les angles de déviation des rayons diffractés qui correspondent à des points homologues dans les systèmes de franges produits par des ouvertures différentes sont en raison inverse des largeurs de ces ouvertures.*

2° *Les distances des rayons semblables (rouge extrême, par exemple) au centre de chaque spectre forment dans chaque cas une progression arithmétique, dont la différence constante est égale au premier terme.*

3° *En nommant* γ *la largeur de l'ouverture exprimée en fractions du pouce de Paris, les distances angulaires* L′, L″, L‴, *etc., exprimées en parties d'un arc de cercle dont le rayon est l'unité, sont représentées respectivement par*

$$L' = \frac{L}{\gamma},\quad L'' = 2\,.\,\frac{L}{\gamma},\quad L''' = 3\,.\,\frac{L}{\gamma},\quad \text{etc.},$$

L *ayant pour valeur* 0.0000211 (0,00002249 *de pouce anglais*). *La même loi s'observe pour tous les rayons colorés ; il n'y a que la valeur de* L *qui change.*

742. — Cette conclusion s'accorde parfaitement avec une expérience rapportée par Newton dans le 3e livre de son *Optique*.

Il émoulut deux lames de rasoir pour que leurs tranchants fussent bien droits, et les mit en contact de telle manière que les tranchants se touchaient en un seul point, et comprenaient un angle qui n'était que de 1° 54', formant ainsi une fente qui s'arrêtait au point de contact, et qui, à quatre pouces de ce point, avait pour largeur un huitième de pouce.

Ayant exposé cet appareil à la lumière d'un rayon solaire émanant d'un très petit trou à une distance de quinze pieds, il reçut les ombres sur un écran, et observa que, lorsqu'elles étaient prises très près des tranchants (à un demi-pouce, par exemple), les franges extérieures de l'ombre de chaque tranchant étaient parallèles à ce tranchant, sans dilatation sensible jusqu'au point où elles se joignaient sans se croiser, en comprenant des angles égaux à celui des tranchants. Mais quand les ombres étaient prises à une grande distance, chaque frange devenait une hyperbole, dont l'une des asymptotes était le tranchant auquel elle appartenait, et l'autre une droite perpendiculaire à celle qui partageait l'angle des tranchants en deux parties égales. Plus les franges s'approchaient du sommet de cet angle, plus elles s'élargissaient et tendaient à se confondre avec l'ombre qu'elles bordaient. Ces hyperboles se croisaient sans interférer, comme on le voit fig. 151. Leurs points d'intersection n'étaient pas cependant à une distance constante de l'angle entre les projections des tranchants, mais leur position variait avec la distance entre l'écran et les rasoirs; ce qui fait dire à Newton : « J'infère de là que la lumière qui produit les franges n'est pas la même à toutes les distances entre l'écran et les lames; mais que, lorsqu'on tient l'écran très près de celles-ci, les franges sont formées par de la lumière qui passe près des tranchants à une distance moindre, et qu'elle est plus rejetée vers l'extérieur que si l'écran était à une plus grande distance. »

Cependant Newton abandonna ces curieuses recherches, qui l'auraient conduit probablement à l'entière connaissance

des lois de la diffraction. Il n'avait guère d'envie de reprendre ce travail, comme il nous l'apprend lui-même, sans doute à cause du chagrin et des contrariétés que lui suscitèrent ses découvertes en optique. Telle fut la récompense de ses nobles efforts. Malheureusement ce n'est pas le seul exemple que l'histoire des sciences nous offre d'une pareille injustice.

743. — Les résultats de l'art. 741 ont été obtenus par Fraunhofer, dans le cas où les deux bords de l'ouverture se trouvaient dans un plan perpendiculaire aux rayons incidents. Mais les phénomènes étaient tout différents lorsque la même ouverture provenait de l'inclinaison d'une ouverture plus grande, de manière que celle-ci fût réduite dans le rapport du cosinus de l'obliquité au rayon, ou lorsqu'on avait limité le faisceau incident par deux bords opaques à des distances inégales de l'objectif.

Dans les expériences de Fraunhofer, deux lames métalliques étaient fixées perpendiculairement sur le cercle horizontal du théodolite; leurs bords étaient exactement verticaux et aux extrémités d'un même diamètre. A la faveur de cette disposition, on pouvait laisser passer autant de lumière qu'on voulait, en faisant tourner le limbe autour de son axe. Or voici ce qu'on observa :

Quand le passage laissé à la lumière était fort large, comme de 0.02 à 0.04 pouces (de Paris), les franges étaient tout-à-fait semblables à celles que l'on voyait lorsque les bords étaient équidistants de l'objectif; mais, lorsque l'ouverture était plus petite, elles cessaient d'être symétriques des deux côtés de la ligne médiaire, celles qui appartenaient au bord le plus voisin de la lunette devenant plus larges que les autres, qui n'éprouvaient aucune altération sensible. Quand l'ouverture se rétrécissait, cette inégalité augmentait jusqu'à ce qu'à la fin les franges dilatées disparussent complétement, à commencer par la plus extérieure. Au moment de s'évanouir, elles grossissaient tout à coup au point de remplir tout le

champ de la lunette, et paraissaient ensuite se perdre d'elles-mêmes. Cependant les franges de l'autre bord restaient immobiles, jusqu'à ce que la dernière frange du côté opposé eût disparu : alors le phénomène s'évanouissait, car les deux bords de l'ouverture se recouvraient entièrement.

744. — Quand l'ouverture devant l'objectif est un petit trou circulaire au lieu d'une fente, et que celle de l'héliostat est pareillement un petit cercle, on obtient des anneaux colorés, qu'il est facile de mesurer exactement à l'aide du micromètre. C'est ainsi que Fraunhofer a trouvé : 1° que, pour des ouvertures inégales, les diamètres des anneaux sont en raison inverse de ceux des ouvertures; 2° que les distances au centre des points maxima du rouge extrême (ou d'une couleur d'une réfrangibilité donnée) forment, pour les divers anneaux d'un même système, une progression arithmétique dont la différence constante est un peu moindre que le premier terme. Ainsi, en nommant γ le diamètre de l'ouverture, et posant

$$L = \frac{0.0000214}{\gamma} \quad \text{et} \quad l = \frac{0.0000257}{\gamma},$$

on a

$$L' = l, \quad L'' = l + L, \quad L''' = l + 2L,$$

en représentant par L', L'', etc., les demi-diamètres angulaires des anneaux exprimés en arcs du cercle dont le rayon vaut l'unité. Nous remarquerons, en passant, l'identité presque parfaite entre les valeurs de L dans ce cas et dans celui d'une ouverture rectiligne, et la différence notable entre celles du premier terme de la progression dans les deux cas.

745. — Quand l'ouverture était un anneau circulaire très étroit, tracé, par exemple, avec une pointe d'acier sur une lame de verre doré, l'image était une tache circulaire en-

tourée pareillement d'anneaux colorés dont les diamètres ne dépendaient point de celui de l'anneau, mais bien de sa largeur. Ces diamètres ne sont autre chose que les intervalles entre les franges homologues des deux côtés de la ligne centrale, dans l'image produite par une ouverture rectiligne d'une largeur uniforme : c'est à quoi l'on devait s'attendre.

746. — La partie la plus curieuse des expériences de Fraunhofer est celle qui a rapport à l'interférence de rayons transmis par un grand nombre d'ouvertures à la fois. Quand ces ouvertures sont parfaitement égales et équidistantes, les phénomènes diffèrent totalement de ceux qui ne sont dus qu'à une seule ouverture.

Fraunhofer fabriqua d'abord un réseau en fil d'archal, composé d'un grand nombre de fils très fins étendus sur un cadre en forme de petit rectangle. Les deux côtés les plus courts de ce cadre étaient des vis exactement semblables, puisqu'elles avaient été tournées dans la même filière. Autour de ces vis et dans les pas étaient tendus les fils, qui étaient conséquemment parallèles et équidistants. Le diamètre des fils était de 0.002021 de pouce de Paris, les intervalles qui les séparaient étaient de 0.003862, et le réseau avait en tout 260 fils. Cet appareil étant placé bien verticalement devant l'objectif d'une lunette, et éclairé par une fente lumineuse de 0.01 de pouce de largeur, aussi exactement verticale et formant la partie visible d'un héliostat, l'image se peignait au centre du champ de la lunette, incolore, bien terminée, et absolument telle, à tout égard, qu'on l'aurait vue sans l'interposition du réseau; seulement son éclat était moindre. Aux deux côtés de cette image était un espace entièrement noir, suivi d'une série de spectres prismatiques, que Fraunhofer appelle *spectres de seconde classe*, qui ne consistent pas en teintes qui se dégradent, comme dans les anneaux colorés, mais en couleurs parfaitement homogènes, au point qu'ils présentent les mêmes raies noires que le spectre prismatique le plus pur et le mieux terminé.

Lorsque tout est disposé comme nous venons de le dire, le premier spectre, ou le plus rapproché de l'image, est complétement isolé, étant séparé de l'image et du second spectre par un intervalle noir. L'extrémité violette des spectres est tournée du côté de l'image; la partie rouge est la plus éloignée; mais le violet du troisième spectre recouvre le rouge du second, de manière qu'il en résulte un espace pourpre au lieu d'un intervalle noir. A mesure que l'on s'éloigne du milieu de l'image, les spectres se confondent de plus en plus : néanmoins on peut en compter jusqu'à treize de chaque côté, à l'aide d'un prisme qui les réfracte transversalement, et sépare ainsi les parties qui se recouvrent.

747. — La mesure des distances entre les points homologues dans les différents spectres est susceptible de la plus grande précision, à cause des raies noires qui les entrecoupent. Une particularité bien remarquable, c'est que ces raies, quoique occupant les mêmes places dans l'ordre des couleurs, ou, en d'autres termes, quoique correspondant *aux mêmes degrés de réfrangibilité* que dans le spectre prismatique, n'ont pas le même rapport entre leurs intervalles, c'est-à-dire que les largeurs des espaces colorés diffèrent entièrement dans les deux cas. Ainsi, dans les spectres par diffraction, l'intervalle entre les lignes C et D (fig. 94) est presque double de celui entre G et H; tandis que, dans le spectre par réfraction, formé par un prisme de flint-glass dont l'angle est de 27°, le rapport est inverse. Dans un prisme d'eau de même angle réfringent,

$$CD : GH :: 2 : 3.$$

748. — Dans les franges par diffraction produites par une seule ouverture, les distances à l'axe dépendent uniquement del a largeur de cette ouverture.

Dans le cas d'un grand nombre d'ouvertures parallèles, les distances des spectres à l'image ne dépendent ni du dia-

mètre des ouvertures ni de l'intervalle qui les sépare, mais de la somme des deux, c'est-à-dire de la distance entre les milieux des ouvertures qui se suivent, ou, dans l'expérience précédente, de la distance entre les axes des fils métalliques. En mesurant avec la plus grande précision plusieurs réseaux dont les fils avaient des grosseurs très différentes, Fraunhofer s'est assuré des lois et des valeurs numériques suivantes :

749. — 1° Pour des réseaux différents, en désignant par γ la largeur de chaque trou et par δ celle des intervalles opaques, les grandeurs des spectres de même ordre et les distances entre les points homologues et l'axe sont en raison inverse de la somme $\gamma + \delta$.

750. — 2° Pour un même réseau, les distances entre l'axe et les points homologues (c'est-à-dire qui appartiennent à des couleurs ou à des raies fixes semblables) des spectres qui se suivent forment une progression arithmétique dont la différence constante est égale au premier terme.

751. — 3° Pour les différentes réfrangibilités correspondantes aux raies fixes B, C, D, E, etc., le premier terme de cette progression est représenté numériquement par les fractions suivantes, qui expriment chacune la longueur d'un arc, ou le rapport de son sinus au rayon supposé égal à l'unité :

$$B = \frac{0.00002541}{\gamma + \delta}, \quad E = \frac{0.00001945}{\gamma + \delta},$$

$$C = \frac{0.00002422}{\gamma + \delta}, \quad F = \frac{0.00001794}{\gamma + \delta},$$

$$D = \frac{0.00002175}{\gamma + \delta}, \quad G = \frac{0.00001587}{\gamma + \delta},$$

$$H = \frac{0.00001464}{\gamma + \delta}, \quad \text{etc.}$$

752. — Ces résultats supposent cependant des réseaux assez grossiers pour qu'on puisse regarder les angles de dif-

fraction comme proportionnels à leurs sinus; mais, quand on emploie des réseaux très fins, les spectres sont formés à une grande distance de l'axe. L'analogie avec d'autres cas semblables, ainsi que la théorie, nous apprend qu'il faut alors remplacer B, C, D, etc., par sin B, sin C, sin D, etc. Les expériences de Fraunhofer ont confirmé la légitimité de cette substitution.

Comme il n'était pas facile de construire des réseaux d'une finesse suffisante, il fit usage de plaques de verre couvertes d'une feuille d'or, qu'il entrecoupait de lignes droites parallèles et équidistantes : il trouva ainsi que la proximité des lignes pouvait être portée au point d'en tracer mille sur un pouce de surface; mais on ne pouvait les rapprocher davantage sans enlever entièrement la feuille d'or. Il substitua quelquefois à celle-ci une couche de graisse tellement mince qu'elle était presque imperceptible. Quoique les intervalles fussent transparents dans ce cas, les phénomènes étaient les mêmes quant aux spectres; seulement l'image au centre était plus claire. Il parvint ainsi à tracer un système de lignes dont la distance était moindre de moitié que s'il avait employé des feuilles d'or. Cependant il lui fut impossible de dépasser ce degré de proximité, quelque graisse ou vernis dont il fît usage. Comme son but était encore loin d'être atteint, il grava sur la surface même de la plaque de verre avec une pointe de diamant, et réussit par ce moyen à tracer des lignes entièrement invisibles, même en les cherchant avec les plus forts microscopes composés, et tellement rapprochées qu'un pouce de Paris en contenait 30,000. Une telle proximité étant incompatible avec l'équidistance parfaite qu'exige la production des spectres dont il s'agit, il ne put séparer les lignes par des intervalles au-dessous de 0.0001223 (ce qui revient à 8,200 environ par pouce), en conservant une précision suffisante pour distinguer les raies fixes des spectres. Si l'on considère qu'une erreur d'un centième d'intervalle, répétée plusieurs fois en plus ou en moins, empêche de reconnaître ces raies, et que, pour obtenir des spectres assez lumi-

neux pour affecter la vue, il faut tracer des centaines et même des milliers de semblables lignes, on pourra se former une idée des difficultés qu'offre ce genre de recherches. Quant aux méthodes employées pour compter ces lignes et pour mesurer leurs distances, nous renverrons le lecteur au mémoire de Fraunhofer, lu à l'Académie des sciences de Bavière, le 14 juin 1823.

753. — Ce physicien remarqua une singularité frappante dans un des réseaux de verre gravés dont il faisait usage : quoique les spectres fussent équidistants des deux côtés de l'axe, ils étaient beaucoup plus brillants d'un côté que de l'autre. Attribuant cet effet à la forme des lignes, qui étaient plus fines au commencement qu'à la fin (ce qui pouvait provenir soit de la figure de la pointe de diamant, soit de la manière de s'en servir), il essaya de tirer de semblables lignes sur une couche de graisse, en tenant le burin obliquement, et reconnut ainsi la justesse de sa conjecture.

754. — Quand les rayons émanant de l'héliostat tombent obliquement sur le réseau, on pourrait supposer que les phénomènes sont les mêmes que ceux que manifesterait un réseau plus serré dont les interstices seraient réduits dans le rapport du cosinus de l'angle d'incidence à l'unité. Cependant l'analogie avec les franges non symétriques produites par une seule ouverture dont les bords se trouvent dans un plan oblique, par rapport à la lumière incidente doit faire pressentir un autre résultat que l'expérience a fait connaître. Ainsi Fraunhofer a trouvé qu'en inclinant un réseau, dont les intervalles $(\gamma + \delta)$ étaient de 0.0001223 de pouce, sous un angle de 55° avec la perpendiculaire, la distance entre l'axe et la première raie fixe était de 15° 6′, d'un côté, et de 30° 33′, c'est-à-dire de plus que le double, de l'autre.

755. — L'une des découvertes les plus intéressantes de Fraunhofer est l'homogénéité parfaite des couleurs des

spectres, qui indique une espèce de *saltus* ou solution de continuité dans la loi d'intensité de chaque espèce de couleur du rayon diffracté. En effet, il est clair qu'en considérant un rayon d'une réfrangibilité quelconque (celui qui correspond à la raie C, par exemple), l'expression analytique de son intensité en fonction de sa distance à l'axe doit être de nature à s'évanouir entièrement par une valeur quelconque attribuée à cette distance, à l'exception de quelques nombres distribués en progression arithmétique : c'est ce qu'on appelle une *fonction discontinue*. Ainsi la courbe qui représenterait cette expression, chaque point ayant pour abscisse sa distance à l'axe, se composerait de points singuliers distribués au-dessous de l'axe à des intervalles égaux ; ou du moins elle ressemblerait à celle de la fig. 151, dans laquelle certaines parties très rapprochées et équidistantes s'élèvent tout d'un coup d'un des hauteurs considérables au-dessus de l'axe, tandis que le reste se confond presque avec cette ligne. On peut regarder une telle fonction comme provenant de la sommation d'une série de valeurs de

$$\int dv \,.\, \sin \frac{\pi}{2} v^2 \quad \text{et de} \quad \int dv \,.\, \cos \frac{\pi}{2} v^2 \text{ (art, 718),}$$

prises successivement entre des limites correspondantes aux points où commencent les interstices ; mais une semblable analyse est trop compliquée pour trouver ici sa place.

Cependant Fraunhofer donne la formule qui va suivre comme le résultat de ses propres investigations, fondées sur le principe des interférences.

Soient n l'ordre d'un spectre quelconque, à partir de l'axe ;

ϵ la distance du milieu d'un interstice jusqu'à celui de l'interstice adjacent, ou $\gamma + \delta$;

λ la longueur d'ondulation d'un rayon homogène ;

Soient σ l'angle d'incidence du rayon par rapport au réseau ;

y la longueur de la perpendiculaire abaissée du fil du micromètre de la lunette (ou du point au foyer de l'objectif où se trouve le rayon homogène que l'on considère dans le spectre en question) sur le plan du réseau.

Désignant par $\theta^{(n)}$ l'élongation angulaire du rayon par rapport à l'axe, on aura généralement

$$\cot \theta^{(n)} = \frac{\sqrt{[\varepsilon^2 - (\varepsilon . \sin \sigma + n\lambda)^2] . [4y^2 + \varepsilon^2 - (\varepsilon \sin \sigma + n\lambda)^2]}}{2y(\varepsilon . \sin \sigma + n\lambda)}$$

Dans cette équation, n doit être regardé comme positif pour les spectres qui se trouvent du côté de l'axe, où le rayon incident fait un angle obtus avec le plan du réseau, et comme négatif pour ceux qui se trouvent du côté opposé. Fraunhofer donne cette formule comme rigoureuse et indépendante de toute approximation. Quand y est très grand par rapport à ε et à λ (ce qui est toujours le cas), elle se réduit simplement à

$$\cot \theta^{(n)} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\varepsilon \sin \sigma + n\lambda)^2}}{\varepsilon . \sin \sigma + n\lambda}$$

ou

$$\sin \theta^{(n)} = \frac{\varepsilon . \sin \sigma + n\lambda}{\varepsilon}.$$

756. — Appliquée à la mesure des distances entre les mêmes raies fixes dans les spectres qui se suivent de chaque côté de l'axe, dans le cas d'un réseau incliné, cette formule représente ces distances avec la plus rigoureuse exactitude.

Lorsque le réseau est perpendiculaire au rayon, $\sigma = 0$, et l'équation devient

$$\sin \theta^{(n)} = \frac{n\lambda}{\varepsilon}.$$

C'est la loi des spectres symétriques, que nous connaissions déjà.

On voit par là que les valeurs de λ, ou les longueurs d'ondulation relatives aux divers rayons désignés par C, D, E, etc., ne sont autre chose que les numérateurs des fractions rapportées à l'art. 751, qui se trouvent exprimés en parties du pouce de Paris : ces longueurs sont donc des données extrêmement précieuses pour la théorie de la lumière, à cause de la grande précision avec laquelle elles ont été déterminées et de l'avantage qu'elles offrent de pouvoir être vérifiées à chaque instant.

757. — Si l'on couvre d'un vernis noir la surface non rayée du réseau de verre, et que l'on reçoive dans la lunette la lumière réfléchie par la surface rayée, on remarque les mêmes phénomènes que si la lumière était transmise au travers de l'épaisseur du verre; et, selon Fraunhofer, la même formule est applicable aux deux cas.

758. — Une conséquence curieuse de cette formule c'est que, si ε, distance entre les lignes, est moindre que λ, et si la lumière tombe perpendiculairement sur le réseau (auquel cas $\sin \sigma = 0$), nous aurons

$$\sin \theta^{(n)} > 1,$$

et par conséquent $\theta^{(n)}$ sera imaginaire. Il s'ensuit que des lignes tracées sur une surface, et séparées entre elles par des intervalles moindres qu'une longueur d'ondulation, ne produisent point de spectres colorés. Ainsi de telles raies ou in-

égalités sur des surfaces polies n'altèrent point la régularité de la réflexion, et ne rendent l'image ni trouble ni obscure, aussi long-temps que leur distance mutuelle est au-dessous de cette limite. Fraunhofer paraît en conclure qu'un objet d'une largeur moindre que λ ne saurait être aperçu à l'aide du microscope; ce qui limiterait le pouvoir amplifiant de cet instrument. Mais cette assertion n'est pas du tout la conséquence de ce qui précède.

759. — Quand les intervalles entre les interstices parallèles sont inégaux et irrégulièrement disposés, les rayons des spectres se mêlent et produisent une ligne blanche perpendiculaire à la direction des stries; mais, lorsque ces interstices sont régulièrement inégaux, c'est-à-dire lorsqu'ils reparaissent après des périodes régulières, les spectres latéraux sont soumis à une loi exprimée par l'équation

$$\sin \theta^{(n)} = \frac{n\lambda}{E},$$

dans laquelle $E = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''$, etc., et représente l'espace entre deux interstices séparés par une période entière.

Les spectres que l'on obtient de cette manière sont toujours composés de lumière homogène, et laissent apercevoir distinctement les raies fixes. Fraunhofer a fait sur ces spectres une observation très curieuse, et d'une grande utilité pratique pour se procurer les mesures nécessaires au calcul des phénomènes : c'est que les spectres qui se suivent diffèrent beaucoup en intensité, quoiqu'ils observent tous la même loi par rapport à leurs distances à l'axe. Cette différence est si bien marquée, que les uns sont tellement pâles qu'on les aperçoit à peine, tandis que les spectres adjacents sont souvent d'une couleur très intense. Lorsqu'on emploie un seul réseau (dont l'intervalle entre les interstices est représenté par E), les spectres des ordres supérieurs sont ordinaire-

ment confondus et effacés par les empiètements de ceux qui les avoisinent; mais, en raison de la propriété énoncée plus haut, ils sont quelquefois très distincts quand on fait usage d'un réseau composé dont la période de récurrence entre les interstices semblables est $E = \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' +$ etc.

Jamais, avec un simple réseau, cet habile observateur n'a pu voir les raies fixes C et F dans le spectre du 12e ordre (à compter de l'axe); tandis qu'avec un réseau composé, formé par trois systèmes de lignes, dont les intervalles ε', ε'', ε''', étaient entre eux comme 25 : 33 : 42, il distinguait, outre C et F, les raies D et E dans ce même spectre; ce qui était dû à la disparition presque totale du 10e et du 11e spectre. Bien plus, il put observer la raie E dans le 24e spectre et mesurer sa distance à l'axe.

760. — Tels sont les phénomènes appartenants aux deux cas extrêmes d'une seule ouverture et d'un nombre de trous sinon infini, du moins très grand. Il nous reste encore à faire voir comment, dans les cas intermédiaires, les phénomènes de la première classe se rattachent à ceux de la seconde.

Quand on ne laisse qu'une seule ouverture dans le réseau, il se forme une série de spectres que nous avons décrits à l'art. 741, et que Fraunhofer appelle *spectres de première classe* : leurs couleurs ne sont pas homogènes; mais elles se dégradent insensiblement.

761. — Lorsque deux interstices contigus sont ouverts, les spectres de première classe sont les mêmes qu'auparavant; mais, entre l'axe et le premier spectre de chaque côté, on voit naître d'autres spectres, que Fraunhofer nomme *spectres imparfaits de deuxième classe*, parce que leurs couleurs sont les mêmes que dans les spectres de première classe, dont ils n'ont pas les raies fixes. S'il y a trois ouvertures adjacentes, il en résulte des *spectres de troisième classe* entre l'axe et le spectre de deuxième classe le plus voisin. On n'aperçoit plus

de nouvelle classe après la troisième; mais les spectre éprouvent une suite de modifications, à mesure que les interstices deviennent plus nombreux.

762. — Premièrement, les spectres de troisième classe deviennent plus étroits, et se rapprochent de l'axe jusqu'à ce qu'ils se confondent pour former par leur union l'image incolore de l'ouverture de l'héliostat, dans la direction de l'axe. Par un grand nombre de mesures très exactes, Fraunhofer a trouvé que leurs largeurs sont, pour un même réseau, en raison inverse du nombre des interstices, et, pour des réseaux différents, en raison inverse des intervalles entre les trous. En général, $\gamma + \delta = \varepsilon$ représentant un des intervalles, m le nombre des interstices et n l'*ordre* d'un spectre, la distance $\theta^{(n)}$ entre l'extrémité rouge et l'axe sera donnée par l'équation

$$\theta^{(n)} = \frac{n}{m} \times \frac{0{,}0000208}{\varepsilon}.$$

763. — Lorsque les spectres de troisième classe se confondent avec l'axe, ils laissent un espace noir entre cet axe et le premier spectre de deuxième classe : celui-ci et les autres de même classe deviennent alors de plus en plus brillants et homogènes, jusqu'à ce que les rayons interférents se trouvent en assez grand nombre pour faire paraître les raies fixes et produire des spectres *parfaits* de deuxième classe.

764. — Fraunhofer a examiné de près les phénomènes produits par des réseaux plongés dans des milieux doués de divers pouvoirs réfringents : il les a trouvés tous semblables; mais les distances de l'axe auxquelles se formaient les spectres étaient moindres que dans l'air, et en raison inverse des pouvoirs réfringents.

765. — Le même savant s'est occupé d'une classe de phénomènes d'une grande beauté, obtenus en substituant aux réseaux de très petites ouvertures d'une figure régulière, comme des cercles et des carrés. Il employait tantôt une seule ouverture, tantôt plusieurs régulièrement disposées, comme dans le cas où deux réseaux égaux se croisent à angles droits. La figure 151 représente le phénomène résultant de l'incidence de la lumière sur l'objectif d'une lunette, après avoir traversé deux trous circulaires de 0.02227 de pouce de diamètre, dont la distance entre les centres égale 0.03831. Chaque compartiment est un spectre séparé. Dans les bandes *aa*, *bb*, on voit clairement l'origine et la composition intime des franges verticales et des franges croisées décrites à l'art. 735. Ces apparences changent quand le nombre des ouvertures vient à augmenter : les spectres deviennent alors plus purs et plus vifs en couleur. L'effet de deux prismes entrecroisés est représenté par une figure dans l'ouvrage de Fraunhofer : c'est un des phénomènes les plus magnifiques que l'on puisse voir.

766. — Quand on observe une étoile brillante avec une lunette excellente, mais d'un grossissement assez faible, elle a toujours l'apparence d'une masse de lumière dont il est impossible de distinguer la forme, à cause de son éclat, et dont les bords sont rarement exempts de dentelures, quelle que soit la bonté de la lunette. Mais si le pouvoir amplifiant s'élève depuis 200 jusqu'à 300 ou 400, et qu'on se trouve dans des circonstances favorables, telles qu'une atmosphère tranquille, une température uniforme, etc., l'étoile paraît parfaitement ronde, bien terminée et entourée de plusieurs anneaux alternativement obscurs et lucides, dont les bords semblent légèrement colorés quand on les examine avec attention. Ces anneaux se suivent de très près à des intervalles égaux autour du disque, et sont ordinairement plus faciles à observer et plus réguliers dans les lunettes que dans les té-

lescopes. Le disque est aussi beaucoup plus grand dans l'un que dans l'autre de ces instruments.

767. — Les disques dont il s'agit furent observés pour la première fois par sir W. Herschel, qui seul possédait des télescopes assez forts pour les rendre visibles. Ce ne sont point les surfaces mêmes des étoiles que l'on voit de cette manière ; elles sont trop éloignées pour être aperçues à l'aide d'aucun instrument amplifiant : ce ne sont que de *fausses* images dues à des effets d'optique dont la cause n'est pas encore bien connue. Il est clair, en effet, pour quiconque s'est pénétré de ce que nous avons dit sur les interférences, et de l'explication donnée aux art. 590 et 591 de la formation des foyers dans le système ondulatoire, que le point focal sur l'axe doit être ébranlé par les ondulations en état d'accord parfait que renvoie chaque point de la surface. Ainsi le foyer doit être vivement éclairé, pourvu cependant que le miroir ou l'objectif soit rigoureusement aplanétique. Mais, si l'on s'éloigne du foyer dans une direction quelconque, suivant un plan perpendiculaire à l'axe, cet accord parfait cessera d'exister, car les rayons d'un côté de l'objectif commenceront à interférer et à détruire ceux de l'autre côté ; de manière qu'à une certaine distance, l'opposition sera totale, et produira des anneaux alternativement obscurs et lumineux. Il n'y a donc plus de doute sur la cause du disque apparent et des anneaux, quoiqu'il serait peut-être assez difficile de calculer leurs dimensions d'après ces données. Mais cette explication ne rend pas compte d'une des circonstances les plus remarquables de ce phénomène, c'est-à-dire du changement de grandeur de la fausse image selon l'étoile que l'on considère, le disque paraissant, en général, d'autant plus large que l'étoile est plus brillante. Ce ne peut être une simple illusion d'optique, car, lorsqu'on voit ensemble deux étoiles d'un éclat différent (comme dans le cas d'une étoile double), et qu'on les compare directement, la différence des

diamètres de leurs faux disques est très sensible. Cet effet ne tient pas non plus à la grandeur réelle des étoiles, car l'interposition d'un nuage qui affaiblit leur éclat réduit leurs disques apparents à de simples points. On ne peut pas non plus l'attribuer à l'irradiation, puisque, dans ce cas, la lumière du disque empiéterait sur celle des anneaux, qui s'effaceraient alors, à moins de supposer que les vibrations de la rétine suivent les mêmes lois que celles de l'éther et qu'elles puissent interférer avec ces dernières. Dans ce cas, le disque et les anneaux formés sur la rétine résulteraient de l'interférence des deux espèces d'ondulations.

768. — Sans approfondir cette question délicate, nous nous bornerons à exposer quelques uns des phénomènes que nous avons observés.

Les effets des diaphragmes ou ouvertures de diverses formes appliquées devant des miroirs et des objectifs nous paraissent mériter une place après les observations intéressantes de Fraunhofer sur les phénomènes produits par de *très petites* ouvertures : ils en sont en quelque sorte le cas inverse.

769. — Lorsque l'ouverture de la lunette est limitée par un diaphragme circulaire qui touche l'objectif ou qui s'en trouve plus ou moins éloigné, le disque et les anneaux s'élargissent en raison inverse du diamètre de l'ouverture. Lorsque celle-ci est fort réduite (à un pouce, par exemple, pour une lunette de sept pieds de longueur focale), le faux disque devient très grand et a l'air d'une planète; son contour est bien tranché, et entouré d'un seul anneau, qui est assez brillant pour être aisément remarqué, et dont les couleurs se trouvent disposées comme il suit, à compter du centre du disque : 1° du blanc, 2° du rouge très pâle, 3° du noir, 4° du bleu très pâle, 5° du blanc, 6° du rouge très pâle, 7° du noir. Si l'ouverture se rétrécit beaucoup plus (si elle se réduit à un demi-pouce, par exemple), les anneaux pâlissent

tellement qu'ils échappent à la vue, et le disque devient encore plus large : on voit alors la lumière s'affaiblir du centre à la circonférence ; ce qui donne au disque une apparence nébuleuse comme celle d'une comète. (Voy. fig. 152.)

770. — Quand on emploie des ouvertures annulaires, les phénomènes sont très beaux et très réguliers. Le diamètre extérieur de l'anneau étant de trois pouces et le diamètre intérieur d'un pouce un quart, la *Chèvre* paraît telle que la représente la fig. 153, et la double étoile *Castor,* comme dans la fig. 154. Si l'anneau devient plus étroit, la grandeur du disque et la largeur des anneaux colorés diminuent aussi ; ce qui est contraire aux expériences de Fraunhofer sur des anneaux très étroits, et doit évidemment avoir une autre cause ; mais, en revanche, ces anneaux deviennent plus nombreux. Avec des ouvertures annulaires dont les diamètres extérieurs sont (en pouces) de 5.5, 0.7, 2.2, et les diamètres intérieurs de 5, 0.5 et 2, la *Chèvre* offrit les apparences représentées par les fig. 155, 156 et 157. Dans le dernier cas, le disque était réduit à un point rond presque imperceptible ; les anneaux colorés étaient si serrés et en si grand nombre qu'à peine on pouvait les compter ; on les aurait pris, au premier coup-d'œil, pour une simple tache ronde et lumineuse. Les intervalles entre ces anneaux disparaissaient entièrement lorsque la largeur de l'ouverture annulaire était réduite à la moitié de la quantité précédente. Les dimensions des anneaux et du disque nous ont paru généralement proportionnelles à $\frac{r'-r}{r}$.

771. — Outre les anneaux dont nous venons de parler, qui touchent immédiatement le disque, il y en a d'autres d'un diamètre beaucoup plus grand et d'une lumière plus faible, tels que des halos. Ceux-ci appartiennent à des spec-

tres de différentes classes, en prenant le mot *classe* dans l'acception que lui a donnée Fraunhofer. Trop pâles pour être vus distinctement avec un seul anneau, ils peuvent aisément être observés au moyen d'une ouverture contenant deux anneaux (fig. 158) : leur aspect est alors celui de la fig. 159, dans laquelle les ombres représentent les anneaux lumineux et les blancs les parties obscures.

772. — Lorsque l'ouverture a la forme d'un triangle équilatéral, on voit se peindre un disque étoilé (fig. 160) très brillant et bien terminé : les six rais qui l'entourent en sont séparés par un anneau noir. Ces rais sont très minces et parfaitement droits; ils sont d'autant plus distincts que la lumière disséminée qui remplit le champ de la lunette, lorsqu'on ne fait point usage de diaphragme, est plus complétement éteinte. Cet effet remarquable est plus que proportionnel à la quantité de lumière détruite. Il a lieu également lorsqu'on substitue au triangle équilatéral une ouverture formée par l'intervalle entre deux triangles équilatéraux concentriques et semblablement placés.

773. — Comme un triangle n'a que trois angles et trois côtés, on peut trouver singulier qu'il se forme une étoile à six rais. En supposant que trois proviennent des angles et les trois autres des côtés, on doit s'attendre à trouver entre eux nne différence sensible, qui dénote leur différence d'origine. Cependant ils sont tous parfaitement éganx quand la lunette est à son foyer; mais, dès qu'elle s'en écarte, cette égalité n'a plus lieu : tel est le cas représenté par la fig. 161. On voit que les branches se composent, les unes de franges parallèles à leur longueur, les autres de petits arcs de franges semblables immédiatement adjacents aux sommets des hyperboles auxquelles elles appartiennent, et qui croisent les rais véritables dans le sens perpendiculaire à leur longueur. Si l'on met la lunette un peu mieux à son foyer, les hyperboles s'appro-

chent de leurs asymptotes, et se confondent par leur grande proximité. Ainsi trois rais sont composés de lignes lumineuses continues, et trois autres d'une infinité de points discontinus infiniment rapprochés. Pour représenter analytiquement l'intensité de la lumière dans un de ces rais discontinus, il faudrait avoir recours à des fonctions d'une nature bien singulière et sans doute très difficiles à manier.

774. — Le phénomène que nous venons de décrire peut faire du diaphragme triangulaire un excellent micromètre de position, et servir ainsi à des usages astronomiques. Supposons qu'on observe une étoile très brillante (telle que α de l'*Aigle*), à côté de laquelle se trouve une autre très petite : en faisant tourner le diaphragme, les rais tourneront en même temps; de manière qu'on pourra toujours en faire passer un par la petite étoile, que l'on examinera alors tout à son aise. Si l'instrument est pourvu d'un cercle gradué sur lequel on puisse lire le nombre de degrés dont le diaphragme s'est écarté de sa position primitive, il sera facile de connaître la situation relative des deux étoiles.

Nous nous sommes assurés par nous-mêmes de la possibilité de mettre cette méthode en pratique. Au moyen de quelques légers changements dans l'appareil, on peut s'en servir avec avantage dans des cas où son emploi paraît extrêmement difficile au premier abord.

775. — Quand on fait usage de trois ouvertures circulaires dont les centres sont aux sommets d'un triangle équilatéral, l'image est un disque brillant au centre du triangle; six disques d'une lumière plus faible sont en contact avec le premier, et tout le groupe est entouré d'anneaux (fig. 162) semblables à des halos. Cependant, lorsqu'on emploie trois ouvertures *annulaires* égales, et que la lunette est à son foyer, l'effet est le même que s'il n'y en avait qu'une (fig. 153); mais, dès que l'on change un peu le foyer, on s'aperçoit de la différen-

ce : tel est le cas représenté par la fig. 163. Chaque ouverture produit alors son disque et son système d'anneaux particulier, et ces derniers forment, par leurs intersections, des franges que nous avons marquées dans la figure. Si la lunette est à peu près à son foyer, le phénomène est tel que le représente la fig. 164 : les centres se rapprochant par degrés, et les anneaux se mêlant de plus en plus, jusqu'au moment de la coïncidence parfaite.

776. — Une ouverture formée par l'intervalle entre deux carrés concentriques ne produit pas une étoile à huit, mais à quatre rais. Ceux-ci, néanmoins, ne sont pas, comme dans le cas d'une ouverture triangulaire, des lignes fines et continues qui vont en s'amincissant, à partir du centre; mais ils se composent de taches alternativement obscures et lumineuses (fig. 165). Les parties les plus proches du disque circulaire qui se trouve au centre consistent en bandes irisées perpendiculaires à la direction des rais. Il doit y avoir des bandes semblables dans les parties les plus éloignées, jusqu'à une grande distance du disque.

777. — Si l'on emploie une ouverture divisée en cinquante carrés, d'environ un demi-pouce, disposés régulièrement de manière à laisser entre eux, dans les deux sens, un espace égal à leur largeur, l'image que l'on obtient diffère entièrement de celle que donne Fraunhofer et qui résulte du croisement de deux réseaux très serrés, quoique la distribution et la forme des ouvertures soient les mêmes dans les deux cas. L'image a la forme d'un disque blanc (fig. 166) entouré de huit spectres lumineux disposés en carré au milieu d'une croix formée par des spectres beaucoup moins lucides qui s'étendent jusqu'à une grande distance du centre.

778. — Quand l'ouverture se compose de plusieurs triangles équilatéraux arrangés régulièrement, comme dans la

fig. 167, l'image offre le beau phénomène représenté fig. 168. C'est une série de disques circulaires rangés sur six lignes qui vont en divergeant à partir du disque central, qui est incolore et très brillant : ils sont entourés chacun d'un anneau plus ou moins coloré, et vont en s'allongeant en spectres à mesure qu'ils s'éloignent du centre.

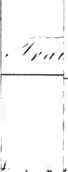
Les phénomènes que nous venons de décrire ne sont qu'une faible partie des effets surprenants qui dépendent de la forme de l'ouverture des télescopes : cette matière intéressante offre encore un vaste champ aux recherches des artistes et des physiciens.

FIN DE LA 3e PARTIE ET DU 1er VOLUME.

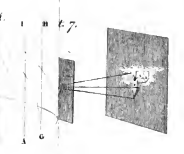


Trai

Planche 1.



t. 7.



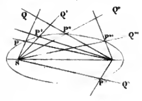


Fig. 12. Art. 118.

Fig. 16.

Fig. 19. Art. 142.



S. Botta sc.

Traité d

Planche 2.

A
P'
t. 163.
Fig. 22. Art. 151.
K
P²
y'
S
O
C
B

N° 2.
7.
Q R
Fig. 26 N° 2. Art. 188.
B
C
F
H
I
s'
P
P'
q
r
P
S
S'
S''
P
T
Fig 21.
Art.
C
D
D
T

S. Botta sc.

Planche 3.

Fig. 39. Art. 238.

Fig. 41. Art. … *Art. 269.* *Fig. 51. Art. 274.*

…3. *Fig. 61. Art. 323.*

Fig. 56. Art. 3…

Fig. 42.

S. Botta sc.

ité de

Planche 4.

67. Art. 337.

64. Art. 333

B C

P

q

Q

3.

370.

K

E

q

p

D'

Q'

P

376

378.

O

Q

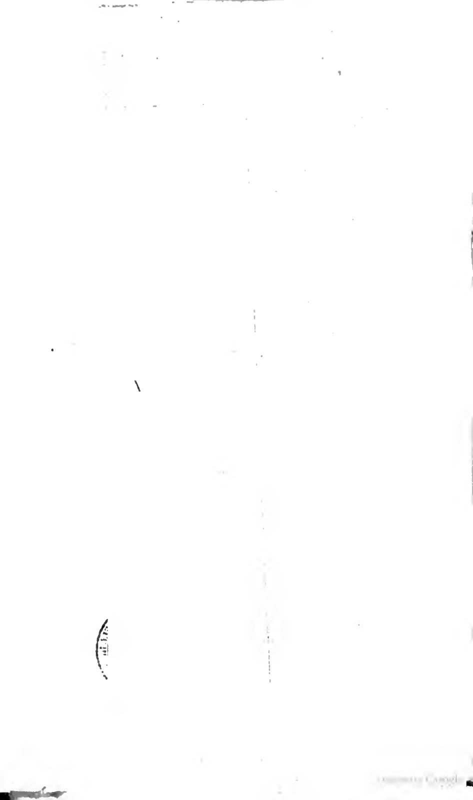
C

p

q

E

S. Botto s.



rté de l

Planche 5.

Fig. 81. A91.

A
A
O
B
B

rt. 412.

G
E
x
b a
e
d
g
c
k F g H
l f h

P
m
T n

S. Botta sc.



Fig. 98. Art. 426.

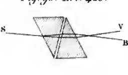
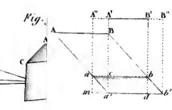


Fig. 103. Art. 434.



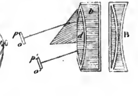


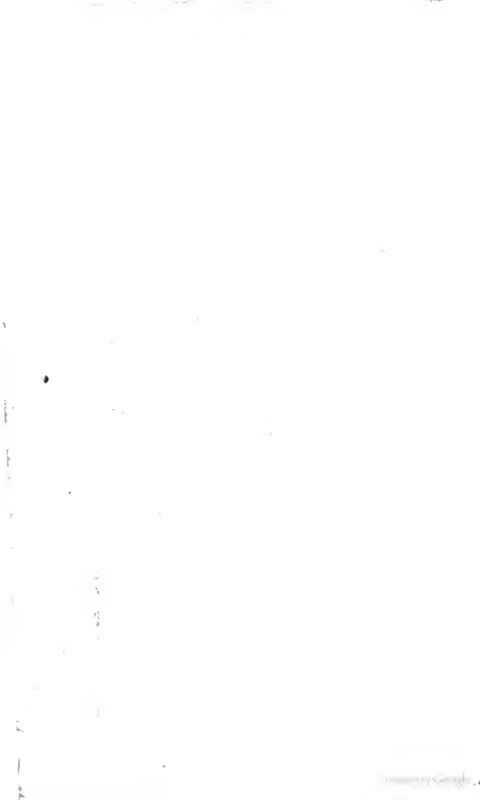


Fig. 109. Art. 475.

Fig. 110. Art. 475.

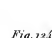


S. Botta sc.



(. Art. 494.

Fig. 116. Art. 496.



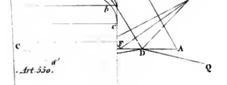


Fig. 124. Art. 554.

. Art. 550.

Fig. 127. Art. 584.

Fig. 129. Art. 586.



S. Botta sc.

...ité de la

Planche 8.

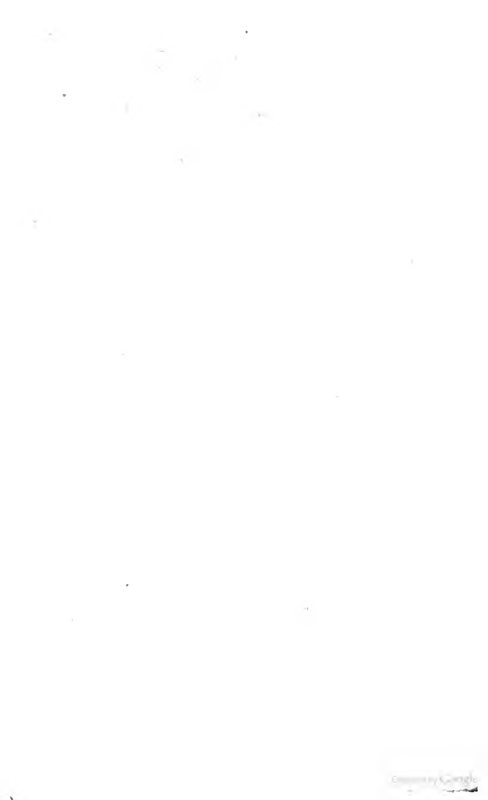
Fig. 41. Art. 700.

Fig. 134. Art. ...

... 139. Art. 693.

Fig. 137. A...

S. Botta sc.



ig. 144. Art. 714.



o. Art. 736.

146. Art. 726.

Fig. 154. Art. 770.

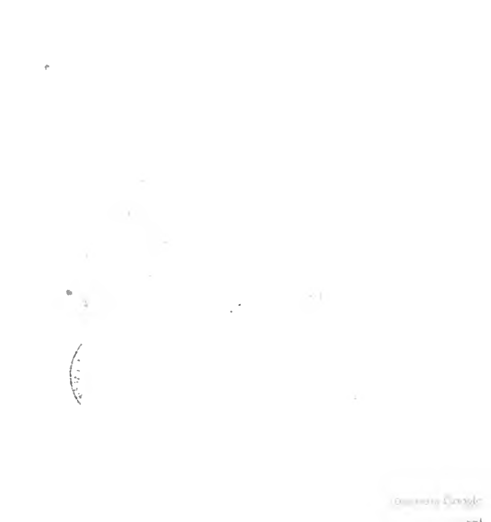


Fig. 151. Art. 755.





S. Botta sc.



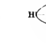
umière.

Planche 10.

Fig. 159.

Art. 775.

Fig. 169. Art. 790



R

P.

B

E

8. Art. 778.



S. Botta sc.



